

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

ӘОЖ 539.3 (043)

Қолжазба құқығында

НУРГОЗИЕВА АЙЖАН ЖАНАБАЕВНА

**Көлденең ығысуды ескергендегі пластинаны есептеудің дәлденген
теориясы**

8D05403-Механика

философия докторы (PhD) дәрежесіне диссертация

Отандық ғылыми кеңесші:
PhD, қауымдастырылған профессор
Ахажанов Сунгат Беркинович,

Шетелдік ғылыми кеңесші:
Мехмет Авжар (Mehmet Avcar),
PhD, профессор,
Сүлеймен Демирел университеті (Түркия)

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2025

МАЗМҰНЫ

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР.....	4
БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР	5
КІРІСПЕ.....	7
1 КӨЛДЕНЕҢ ЫҒЫСУ ДЕФОРМАЦИЯСЫН ЕСКЕРЕТІН ДӘЛДЕНГЕН ТЕОРИЯЛАРҒА АРНАЛҒАН ЗЕРТТЕУЛЕРГЕ ШОЛУ	10
2 КӨЛДЕНЕҢ ЫҒЫСУ ДЕФОРМАЦИЯСЫН ЕСКЕРГЕНДЕГІ ПЛАСТИНАНЫ ЕСЕПТЕУДІҢ ЖЕТІЛДІРІЛГЕН ДӘЛДЕНГЕН ТЕОРИЯСЫ	17
2.1 Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі жетілдірілген дәлденген теория бойынша пластинаның математикалық моделі	17
2.1.1 Негізгі болжамдар, жылжулар, деформациялар мен кернеулер	17
2.1.2 Пластинаның дифференциалдық тепе – теңдік теңдеуі, ішкі күштері...	20
2.1.3 Көлденең ығысу параметрі мен шекаралық шарттар	23
2.2 Тік бұрышты пластинаны есептеуде айнымалылар бөлу әдісі мен арқалық функцияларын қолдану.....	27
2.2.1 Пластинаны айнымалылар бөлу әдісі бойынша есептеу	27
2.2.2 Пластинаны есептеуде қолданылатын арқалық функциялары	31
2.3 Тік бұрышты пластинаның кернеулік-деформациялық күйін есептеу алгоритмі	35
3 КӨЛДЕНЕҢ ЫҒЫСУ ДЕФОРМАЦИЯСЫН ЕСКЕРГЕНДЕГІ ПЛАСТИНАНЫ АҚЫРЛЫ ЭЛЕМЕНТТЕР ӘДІСІМЕН ЕСЕПТЕУ	37
3.1 Изотропты пластинаның иілуіндегі төртбұрышты ақырлы элементі, қатаңдық матрицасы мен жүк векторы.....	37
3.2 Көлденең ығысуды ескергендегі пластинаның ақырлы элементінің пішін функциясы, қатаңдық матрицасы мен жүк векторы.....	48
4 КӨЛДЕНЕҢ ЫҒЫСУ ДЕФОРМАЦИЯСЫН ЕСКЕРГЕНДЕГІ ТІКБҰРЫШТЫ ПЛАСТИНАЛАРДЫҢ ИІЛУІН ЕСЕПТЕУ.....	54
4.1 Таралған жүктеме әсер еткенде барлық жақтары топсалы тірелген пластинаның иілуі	54
4.2 Әртүрлі бекінісі бар пластиналардың таралған жүктеме әсерінен иілуі ..	66
4.2.1 Контуры қатты бекітілген пластинаның иілуі	66
4.2.2 Қарама-қарсы екі жағы топсалы тірелген және екі жағы қатты бекітілген пластинаның иілуі	68
4.2.3 Үш шеті топсалы тірелген және бір шеті қатты бекітілген пластинаның иілуі.....	71
4.2.4 Қарама-қарсы екі шеті топсалы тірелген және екі шеті бос пластинаның иілуі.....	72
4.3 Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаны ақырлы элементтер әдісімен есептеу	75
4.3.1 Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі серпімді бекітілген пластинаны есептеу.....	75

4.3.2 Тесік ақауы бар пластинаны ақырлы элементтер әдісімен есептеу	82
4.3.3 Серпімділі негіздегі пластинаны ақырлы элементтер әдісімен есептеу	89
ҚОРЫТЫНДЫ	95
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ	96
ҚОСЫМША	100

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Бұл диссертацияда келесі стандарттарға сілтемелер жасалды:

ҚР МЖМБС 5.04.034-2011 Қазақстан Республикасының Мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім. Докторантура. Негізгі ережелер.

Автореферат және диссертацияны безендіру бойынша нұсқаулық, ҚР БҒМ, Жоғары аттестаттау комитеті. – Алматы, 2004.

МС 7.1-2003 Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Жалпы талаптар және жобалау ережелері.

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

x_1, x_2, x_3	–	декарттық координатар жүйесі
x, y, z	–	көлденең өлшемсіз координаталар
a_1, a_2	–	пластинаның (x_1, x_2) координаттық өстер бойындағы өлшемдері (қабырғаларының ұзындықтары)
h	–	x_3 координаттық өс бойындағы өлшемі (пластинаның қалыңдылығы)
$q(x_1, x_2)$	–	пластинаға әсер ететін сыртқы таралған жүктеме.
D	–	пластинаның цилиндрлік қатаңдығы
G	–	ығысу модулі
E	–	серпімділік модулі
n	–	серпімділік тұрақтылар параметрі
g	–	цилиндрлік қатаңдық параметрі
γ_0	–	көлденең ығысу параметрі
$f(z)$	–	көлденең ығысудың таралу функциясы
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	–	сызықтық деформациялар
$\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$	–	ығысу деформациялары
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	–	нормал кернеулер
$\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$	–	жанама кернеулер
$\psi(z), \delta(z)$	–	жанамалық және нормалдық кернеулердің таралу функциялары
u_1, u_2, u_3	–	жылжулар
$\varphi(z)$	–	тангенциалдық жылжулардың таралу функциясы
$W(x_1, x_2)$	–	жалпы майысу функциясы
$\tilde{W}(x_1, x_2)$	–	ығысу деформациясы ескерілген майысу функциясы
$W_0(x_1, x_2)$	–	классикалық теория бойынша майысу функциясы
M_1, M_2, M_{12}	–	x_1 мен x_2 өстерімен бағытталған иілу және бұралу моменттері
Q_1, Q_2	–	x_1 мен x_2 өстеріне перпендикуляр көлденең күштер
θ_1, θ_2	–	x_1 мен x_2 өсіне бағыттас нормалдың бұрылу бұрышы
k^2	–	біртекті теңдеудің меншікті санының квадраты
R, R_0	–	ішкі және сыртқы күштердің тең әсерлі күштері
A, A_0	–	ішкі және сыртқы күштердің жұмыстары
$\bar{V}$	–	элементтің жылжу векторы
$\bar{V}^T$	–	элементтің транспонирленген жылжу векторы
B	–	деформация матрицасы
K	–	ақырлы элементтің қатаңдық матрицасы
$\bar{F}$	–	түйін күштерінің векторы
$\bar{q}^T$	–	пластинаның координаттық функцияларының

транспонирленген векторы

- $(q_1 - q_{12})$ – көлденең ығысуды ескермегендегі координаттық функциялар
- $(q_1^0 - q_{12}^0)$ – көлденең ығысу деформациясын ескергендегі координаттық функциялар
- φ_i, ψ_i – x_1, x_2 өстері бойынша бұрыштық жылжу
- R_i – ϕ_i бұрыштық жылжуы бойымен бағытталған момент
- T_i – ψ_i бұрыштық жылжу бойындағы момент
- Q_i – W_i жылжуы бойымен бағытталған күш
- $(W_1 - \beta_4^0)$ – көлденең ығысу деформациясын ескергендегі түйіндік жылжулар
- g_1, g_2 – ақырлы элементтің көлденең ығысу параметрлері

КІРІСПЕ

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Пластиналарды көлденең ығысу деформация әсерін ескере отырып есептеу құрылыс, машина жасау, авиация және басқа да салаларда құрылымдық элементтердің беріктік пен орнықтылығын арттыруда маңызды рөл атқарады. Көптеген есептеу әдістерінде көлденең ығысудың әсері ескерілмейді немесе жуық мәні қабылданады, бұл нәтижелердің дәлдігіне әсер етіп, материалдардың дұрыс пайдаланылмауына немесе құрылымдардың қажетті деңгейде сенімді болмауына әкелуі мүмкін.

Қазіргі кезде жұқа пластиналар немесе жүктеме қарқындылығы жоғары пластиналар үшін көлденең ығысу деформация әсерін есепке алу арқылы олардың кернеулік-деформациялық күйін дәлірек анықтауға мүмкіндік бар. Бұл жұмыс көлденең ығысу деформациясын ескеретін жетілдірілген аналитикалық және сандық әдістерді әзірлеуге бағытталған. Бұл өз кезегінде инженерлік тәжірибеде құрылымдық элементтердің беріктілік және орнықтылық сипаттамаларын сенімді бағалауға жағдай жасайды.

Кирхгоф гипотезаларына негізделген пластинаның классикалық теориясы жұқа пластиналарды есептеу үшін жеткілікті болғанымен заман талабына сай бұл теорияны дәлдеу қажеттілігі пайда болды. Рейсснер мен Миндлин ұсынған бірінші ретті ығысу теориясынан бастап осы уақытқа дейін ұсынылған жоғары ретті ығысу теориялар дәлірек нәтиже көрсеткенімен, теорияларға жаңа тәуелді айнымалылар енетіндіктен есептеу күрделі және ұзақ уақыт алады.

Сондықтан көлденең ығысуды ескеретін дәлденген есептеу теориясының әзірленуі және оны инженерлік есептерде қолдану әдістемесінің жасалуы қазіргі заманғы инженириядағы өзекті мәселе болып табылады.

Диссертациялық жұмыстың мақсаты: Көлденең ығысу деформациясын ескере отырып изотропты жұқа пластинаны есептеудің дәлденген теориясының жетілдірілген нұсқасын әзірлеу және оның негізінде пластинаның кернеулік-деформациялық күйін есептеу әдісін құру.

Зерттеу міндеттері:

1. Көлденең ығысу деформациясы ескерілген дәлденген теорияның жетілдірілген нұсқасына сәйкес негізгі болжамдарды тұжырымдау, негізгі шешуші теңдеуді қорытып шығару және көлденең ығысу деформациясын параметр ретінде алу.

2. Пластинаның иілу есебін арқалықтың иілу есебіне келтіру. Цилиндрлік қатандық параметрін анықтау.

3. Тікбұрышты жұқа пластинаның кернеулік-деформациялық күйін есептеуге арналған айнымалыларды бөлу әдісін құру және арақалық функцияларын қолдану арқылы есептеу алгоритмін әзірлеу.

4. Өртүрлі бекінісі бар пластинаның кернеулік-деформациялық күйін есептеу. Жетілдірілген әдіс негізінде алынған нәтижелерді классикалық және белгілі дәлденген теориялар нәтижелерімен салыстыру.

Зерттеу нысаны – изотропты тікбұрышты жұқа пластина.

Зерттеу әдістері. Көлденең ығысу ескерілген дәлденген теорияны жылжу функциясы арқылы жетілдіру, көлденең ығысу ескерілген пластинаның кернеулік-деформациялық күйін зерттеу үшін айнымалыларды бөлу әдісі, ақырлы элементтер әдісі қолданылды, барлық есептеулер MathCAD, Fortran бағдарламасында жүргізілді.

Зерттеу нәтижесінің теориялық және тәжірибелік маңыздылығы.

Пластиналарды есептеудің дәлденген теориясы жұқа пластиналардың кернеулік-деформациялық күйін дәлірек сипаттауға мүмкіндік береді. Дәлденген модельдер қауіпсіздікті арттыруға мүмкіндік береді, бұл салмақты, шығындарды және материалды тұтынуды азайтуға әкеледі. Пластиналарды есептеудің ұсынылған теориясы композиттік, анизотропты, көпқабатты материалдарға бейімделуі мүмкін, бұл оны қазіргі заманғы инженерлік тәжірибеде әмбебап құрал етеді. Бұл есептеу теориясы компьютерлік модельдеудің сенімділігін арттыра отырып, сандық әдістермен (ақырлы элементтер әдісі) біріктірілген.

Жұмыстың ғылыми жаңалығы:

1. Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаны есептеудің дәлденген теориясының математикалық моделін құру, көлденең ығысуды параметр түрінде қолдану, пластинаның иілу есебін арқалықтың иілу есебіне цилиндрлік қатаңдық параметрі арқылы келтіру.

2. Ұсынылған жетілдірілген теория негізінде әр түрлі бекінісі бар тікбұрышты пластиналарды қарапайым полиномдар арқылы есептеу әдісін құру.

Қорғауға ұсынылатын тұжырымдар:

- Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаның дәлденген теориясының жетілдірілген нұсқасының негізгі теңдеулері мен нұсқасын ұсыну. Көлденең ығысуды параметр түрінде ескеру. Негізгі тепе-теңдік теңдеуінің санын бірге төмендетуге болатынын көрсету.

- Айнымалыларды бөлу әдісі мен дайын арқалық функцияларын қолдана отырып тікбұрышты пластинаны есептеудің әмбебап әдісі мен алгоритмі ұсынылады.

- Көлденең ығысуды ескергендегі жетілдірілген дәлденген теориясы ақырлы элементтер әдісімен оңай жүзеге асады.

Жұмыстың апробациясы: Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері:

- әл-Фараби атындағы ҚазҰУ механика-математика факультетінің «Механика» кафедрасының ғылыми семинарларында баяндалып, талқыланды (2020-2024 жж.);

- студенттер мен жас ғалымдардың «GYLYM JÁNE BILIM - 2022»: XVII Халықаралық ғылыми конференциясында, Қазақстан, Нұр-Сұлтан;

- «Фараби әлемі» студенттер мен жас ғалымдардың халықаралық ғылыми конференциясында, 2023, Қазақстан, Алматы, ұсынылып, нәтижелер баспаға жарияланды.

Жарияланымдар. Диссертация мазмұны бойынша 8 жұмыс жарияланды, солардың ішінде халықаралық конференцияларда - 2, Scopus дерекқорында индекстелген журналдарда - 2, ҚР Білім және ғылым саласындағы бақылау комитеті ұсынатын журналдарда - 4.

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, төрт тараудан, қорытындыдан, әдебиеттер тізімі мен қосымшадан тұрады.

Диссертацияның негізгі мазмұны.

Жұмыстың кіріспесінде диссертациялық зерттеу тақырыбының өзектілігі, жұмыстың негізгі мақсаты, зерттеу объектісі, пәні мен әдістері, ғылыми жаңалығы, диссертацияның ғылыми-практикалық маңызы қалыптастырылды.

Бірінші тарауда зерттелетін мәселенің қазіргі күйі талданды және көлденең ығысу деформациясын ескергендегі дәлденген теория бойынша әдебиеттерге шолу жасалды.

Екінші тарауда көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаның жетілдірілген дәлденген теориясына негізделіп оның математикалық моделі құрылған. Айнымалыларды бөлу әдісіне негізделіп пластинаның классикалық теория бойынша шешімін анықтау жолы ұсынылған және де алынған шешім мен көлденең ығысу параметрі қолданып пластинаның дәлденген теория бойынша шешімі алынған. Сонымен қатар пластинаның шешімін анықтау үшін арқалық функцияларын қолдану реті келтірілген.

Үшінші тарауда ақырлы элементтер әдісі бойынша көлденең ығысу деформациясын ескергендегі изотропты пластинаны есептеу жолы берілген.

Төртінші тарауда ұсынылған әдіске мысал ретінде бірқалыпты таралған жүктеме әсер еткенде әртүрлі бекінісі бар пластиналардың иілу есебі шешілген және нәтижелерге салыстыру жасалды. Ақырлы элементтер әдісін қолдануы мысалы ретінде серпімді тірелген пластина, серпімділік негізі бар пластина және тесік ақауы бар пластиналар есептелген.

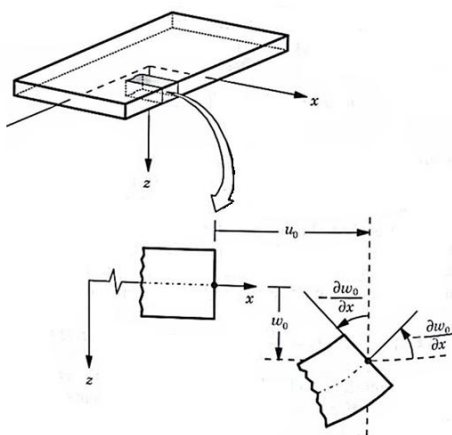
Қорытындыда осы диссертациялық жұмыстың барысында алынған нәтижелер бойынша қорытындылар берілген.

1 КӨЛДЕНЕҢ ЫҒЫСУ ДЕФОРМАЦИЯСЫН ЕСКЕРЕТІН ДӘЛДЕНГЕН ТЕОРИЯЛАРҒА АРНАЛҒАН ЗЕРТТЕУЛЕРГЕ ШОЛУ

Пластиналар мен қабықшалар теориясы деформацияланатын қатты дене механикасының негізгі бөлігі болып саналады, себебі пластиналар мен қабықшалар авиа, зымыран, аспап, кеме, ғимарат құрылысы сияқты және т.б. салаларда жиі қолданылатын негізгі элемент. Көлденең ығысу деформация әсері анық байқалатын материалдарды өнеркәсіпте қарқынды қолдану нәтижесінде ғылымда жаңа талдау әдістерін зерттеу мәселесі туындайды. Ал аталған әсерлерді ескермейтін пластиналардың классикалық теориясы талдау және зерттеу үшін жеткіліксіз.

Қарапайым теория болып саналатын пластиналардың классикалық теориясының шығу және даму тарихы екі ғасырдан астам уақытты алып жатыр [1], [2], [3] және Кирхгофтың [4] жасаған болжамдарына негізделген соң әдетте оның атымен аталады. Кирхгоф пластиналар теориясын құру үшін екі өлшемді есепке қатысты Бернулли-Эйлердің жазық қималар гипотезасын жалпылайтын гипотезаны алды. Дербес жағдайда пластинаның орта жазықтыққа қатысты нормал элементі пластина иілген кезде түзу сызықты және нормалды болып қалады да, орта жазықтықта деформациялар (созылу, сығылу және ығысу) болмайды деп саналады және σ_z көлденең нормал кернеуі ескерілмейді.

Кирхгофтың бастапқы теориясында Пуассон әсерімен байланысты w майысу z координатасынан тәуелді деп ескерілді. Кейін Томпсон мен Тэт [5] көлденең нормал деформациясы болмайды деп Кирхгофтың гипотезасын толықтырды. Нәтижесінде майысу тек x , y координаталарынан тәуелді болды, яғни $w=w(x,y)$. Сонда жылжулар өрісі нөлдік трансверсал деформацияларына сәйкес келеді (сурет 1.1).



Сурет 1.1 - Классикалық теория бойынша пластинаның деформацияланбаған және деформацияланған күйі.

Осы сияқты бұл теорияның әр түрлі қолданбалы түрлерін Love [6], Тимошенко мен Войновский-Кригер [7], Тимошенко мен Гир [8] және т.б. ұсынды.

Алғаш рет көлденең ығысуды ескеру қажеттігі туралы Тимошенко арқалықтың көлденең тербелісі туралы есебіне қатысты көрсетті [9]. Ал Рейсснер [10], [11] пластинаның серпімді-статикалық иілуінің жаңа сызықтық теориясын кернеуге негіздеп жасап ұсынды. Ол пластинаның орта сызығына түзусызықты элементінің нормал болу гипотезасынан бас тартып, осы элементтің түзусызықты болып қалу гипотезасын қабылдады. Рейсснер пластинаның қалыңдығы бойынша кернеудің иілу заңын сызықтық түрде береді, ал жанама және нормал көлденең кернеулерін үш өлшемді серпімділік теорияның тепе-теңдік теңдеулерінен анықтайды. Одан соң пластинаның толық энегиясын құрып, Кастильяноның вариациялық принципін қолдана отырып есепті экстремумге шығарады. Белгісіз Лагранж көбейткіштері ретінде алынған шамалар пластинаның көлденең қимасында нормалдың майысуы мен бұрылу бұрыштарын сипаттайтыны анықталды. Рейсснер бойынша пластинасының иілу есебінің фундаменталды дифференциалдық теңдеулерінің жүйесі мына түрде болады:

$$\begin{aligned} D\nabla^2\nabla^2 w &= q - \frac{h^2}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} \nabla^2 q, \\ \nabla^2 \Phi - \frac{10}{h^2} \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

мұндағы Φ – кернеу функциясы.

Рейсснердің аппроксимациясына ұқсас Миндлин [12] жылжуларға негізделген тәсілді қолданып теория құрды. Миндлин теориясына сәйкес көлденең ығысу пластинаның бүкіл қалыңдығында тұрақты деп есептеледі, бірақ бұл болжам ығысу кернеулері жоқ беттің шарттарын бұзады. Миндлин теориясы көлденең ығысу кернеулері мен ығысу деформациялар арасындағы сәйкесіздікті ығысуды түзетуші коэффициентін қолдану арқылы жуықтап қанағаттандырады. Әдебиетте бұл теорияны пластинаның *бірінші ретті ығысу теориясы* деп атайды, ал бұл әдіспен шығарылатын пластиналарды Рейсснер-Миндлин пластиналары деп атап кеткен.

В.В. Васильев [13] жұқа изотропты пластиналардың классикалық теориясына және бірінші ретті ығысу теориясына сыни көзқараспен талдау жасады. В.В. Васильев [14] Рейсснер теориясы Кирхгоф теориясын нақтыламайды, ал физикалық тұрғыдан дұрыс болатын пластина теориясына дейін толықтырады деп санайды және оны классикалық теория деп атау керек деп ұсынды. Бұл тұжырымдаманы негіздеу мақсатында төртінші ретті пластиналардың классикалық теориясының физикалық сәйкессіздігін көрсетіп, ал алтыншы ретті теорияның теңдеулері вариациялық есепті қажет етпей дәстүрлі түрде тікелей жолмен қорытылатыны және пластина

теориясының математикалық және физикалық тұрғыдан сәйкес болатынын көрсетеді [15].

Wang C.M. [16] Рейсснер және Миндлин құрған теориялардың айырмашылықтары бар екенін және оларды қосарлана аталуы қате пікір екенін айтады. Екі теорияның арасындағы сапалық айырмашылықтарды көрсету үшін ол Рейсснер мен Миндлин пластиналарының иілу қатынастарының сандық мәндерін анықтады. Бұл қатынастардан алынған Рейсснер пластинасының шешімдерін Salerno мен Goldberg [17] Рейсснердің теориясы бойынша пластиналарды тікелей есептеп нәтижелерімен салыстырды, ал Mansfield [18] және Lee [19] алған нәтижелерді Кирхгоф және Миндлин пластиналар нәтижелерімен сәйкесінше салыстырды.

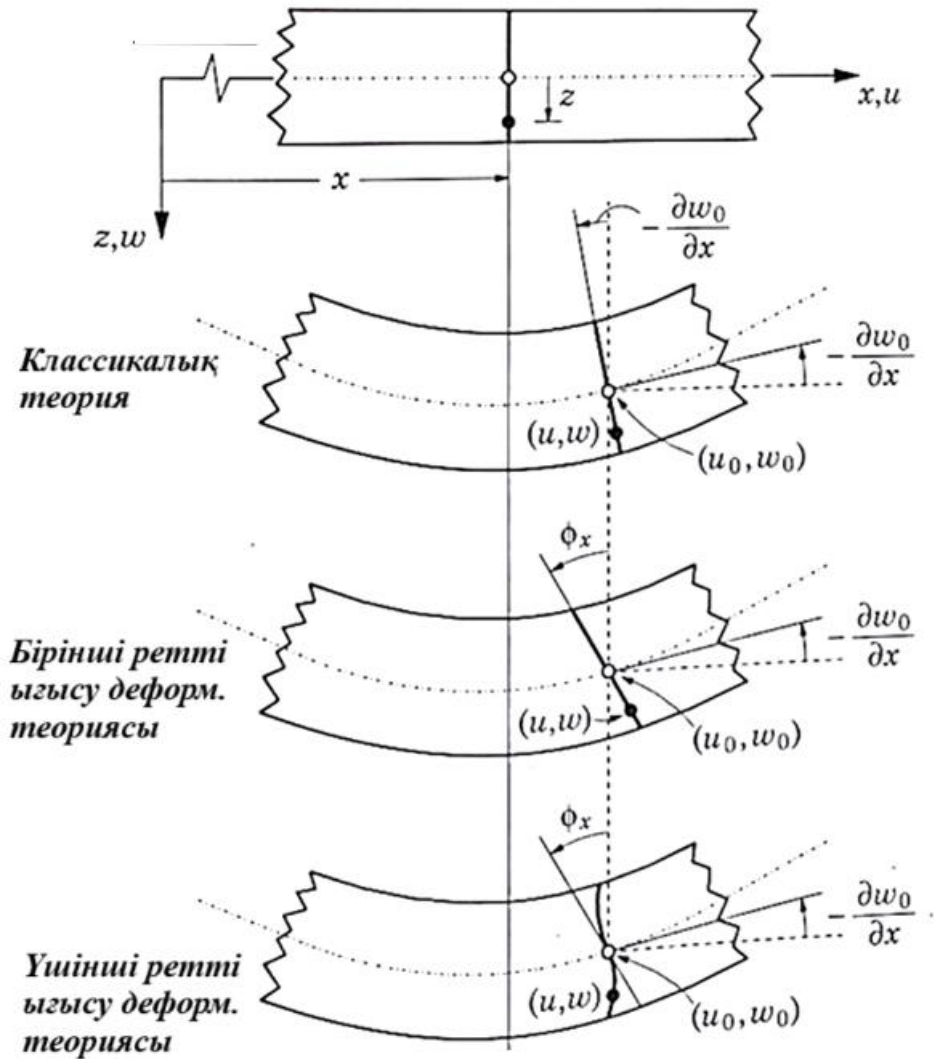
Ортотропты пластиналардың кернеулерге негізделіп жетілдірілген теориясын Medwadowski [20] ұсынды. Бұл теорияда сызықтық емес тендеулер жүйесі серпімділіктің үш өлшемді теориясының сәйкес тендеулерінен алынды. Тендеулер жүйесі сызықтық болып, кернеу функциясы қолданылды.

Librescu [21] әдісінде теңгерілген көлденең жылжулар қолданылады. Ығысу кернеуі мен ығысу деформациясы арасындағы негізгі қатынастар қанағаттандырылады. Рейсснер тұжырымы Librescu көзқарасының дербес жағдайы болып табылады.

Levinson [22] материалдар кедергісін қолданады және оның теориясы Миндлин теориясына қарағанда қосымша түзетуші факторды талап етпейді. Levinson тәсілімен алынған пластина қозғалысының негізгі тендеулері Миндлин теориясымен бірдей болады, егер Миндлин теориясымен байланысты ығысудың түзетуші коэффициенті $5/6$ тең деп қабылданса.

Бірінші ретті деформация теориясының кемшілігі ретінде композиттік пластиналарға қолданғанда ығысуды түзетуші факторын дәл бағалау қиындығы болады. Композиттік пластиналарды талдау үшін Рейсснер [23] өзінің бірінші ретті теориясын нақтылады және жоғары ретті ығысу деформациясының теориясын жасады. Бірінші ретті теориямен салыстырғанда жоғары ретті функциялармен сипатталған жылжу өрісі көлденең ығысу деформацияларының қалыңдық бойынша сызықты емес таралуларын дұрыс жуықтай алады. Осы еңбегінің арқасында жоғары ретті ығысу деформациясының бірқатар теориялары әзірленді және көп қабатты композиттік пластиналарды талдауға қолданылды.

Levinson [22] және Murthy [24] қалыңдық бойындағы жазықтықта жылжуларды кеңейту үшін үшінші ретті көпмүшелерді қолданатын пластиналар теориясын жасады. Алайда Levinson мен Murthy-дің пластиналар теориясында жылжулар кинематикасымен вариациялық үйлеспейтін пластиналардың классикалық теориясының тепе-теңдік тендеулері қолданылды. Бұл кемшілікті түзету үшін Reddy [25], [26] пластиналардың вариациялық үйлесетін тепе-теңдік тендеуі бар теорияны дамытты және де Reddy-дің теориясын анизотропты қабатты композиттік пластиналар үшін қолдануға болады.



Сурет 1.2- Классикалық теория, бірінші ретті ығысу теориясы мен үшінші ретті ығысу теориясы бойынша колденең нормалдың деформациясы.

Reddy [26] пластинаның үшінші ретті ығысу деформация теориясында түзусызықтық жорамалын алып тастау арқылы кинематикалық гипотезасын одан әрі босаңсытады, яғни деформацияға дейінгі орта жазықтыққа түзу нормаль деформациядан кейін кубтық қисықтарға айналуы мүмкін. (Сурет 1.2). Reddy-дің берілген теориясында жылжу өрісі мына түрде болады:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= z\phi_x(x, y) + z^3\left(-\frac{4}{3h^2}\right)\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right); \\
 v(x, y, z) &= z\phi_y(x, y) + z^3\left(-\frac{4}{3h^2}\right)\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right); \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y).
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Жылжу өрісі көлденең ығысу деформацияларының (демек, кернеулердің) квадраттық өзгеруіне сәйкес келеді және пластинаның жоғарғы мен төменгі беттерінде көлденең ығысу кернеулерінің жоғалуына әкеледі. Осылайша, үшінші ретті теориядағы ығысуды түзетуші факторды қолдану қажеттілігі туындамайды. Есептеулердің артуына байланысты үшінші ретті ығысу теориясының дәлдігі бірінші ретті ығысу теориясына қарағанда сәл өседі.

Rohwer [27] қорытындысы бойынша Murthy мен Reddy-дің пластиналар теориясы барлық жоғары ретті ығысу деформация теорияларының арасында жетекші болып қала береді. Ferreira [28] сәйкес Reddy-дің пластиналар теориясы көп қабатты композиттік пластиналарды талдау үшін қолданылатын ең танымал әрі қарапайым жоғары ретті ығысу деформация теориясы болып табылады.

Reddy теориясынан басқа, Амбарцумян [29] көп қабатты анизотропты пластиналардың деформациясын түсіндіру үшін көлденең ығысудың басқа кернеу функциясын ұсынды. Амбарцумян теориясы белгілі Рейсснер мен Миндлин теориясының жалғасы болып табылады және көп қабатты композиттік құрылымдарды талдауда кең қолданыс тапты.

Жоғарыда аталған Murthy мен Reddy пластиналар теорияларын басшылыққа алып Shi G. [30] пластиналардың жаңа қарапайым үшінші ретті деформация теориясын ұсынды. Shi G. ұсынған теорияда вариациялық үйлесімді басқарушы теңдеулердің жаңа жиынтығын және олармен байланысты дұрыс шекаралық шарттар шығарылды. Shi G. теориясымен алынған аналитикалық шешімдер жоғары ретті ығысу деформация теорияларына қарағанда жақсы нәтиже бере алатынын көрсетті.

Yucheng Liu [31] өз жұмысында жетілдірілген жоғары ретті пластиналар теориясын Амбарцумян теориясының негізінде жасайды. Ұсынылған теорияны анизотропты материалдардан жасалған көп қабатты композитті пластиналарды талдауға тікелей қолдануға болады. Сонымен қатар, берілген пластиналар теориясын бұралу мен иілуге жұмыс істейтін қабықшаның ақырлы элементтерін модельдеуіне қолдануға болады.

Сонымен қатар жоғары ретті пластиналар теориясының көлденең ығысу кернеуін тригонометриялық функциялармен сипаттаған Touratier M. [32], Soldatos K.P. [33], көрсеткіштік функциялармен сипаттаған Karama M. мен т.б. [34] және Aydogdu M. [35] сияқты басқа зерттеушілерді атауға болады.

Rameshchandra P. Shimpi [36], [37], [38], [39] жаңа жетілдірілген пластиналар теориясын дамытып, оның екі қарапайым нұсқасын ұсынды. Бұл теорияның теңдеулері пластинаның классикалық теориясының теңдеулеріне қатты ұқсайды. Дегенмен, одан айырмашылығы бар: көлденең және осьтік жылжулардың иілу және ығысу компоненттері бар деп есептейді, сондықтан иілу компоненттері ығысу күштеріне ықпал етпейді және сол сияқты ығысу компоненттері иілу моменттеріне ықпал етпейді, яғни $w = w_b + w_s$ (w_b – иілу компоненті және w_s – ығысу компоненті).

Теорияның бірінші нұсқасында вариациялық үйлесімділік сақталады, бірақ шекті тиімділік мүшелерін елемей толық потенциалдық энергияның қарапайымдатылған өрнегі қолданылады. Негізгі теңдеулер мына түрде беріледі

$$\begin{aligned}\nabla^2 \nabla^2 w_b &= q / D, \\ \nabla^2 w_s &= -\frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{q}{D}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Екінші нұсқада жалпы тепе-теңдік теңдеуін қолдана отырып негізгі теңдеуді пластинаның классикалық теориясындағы негізгі теңдеу түрінде ұсынады, бірақ көлденең жылжуға емес майысу компонентіне қатысты жазып шығарады:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \nabla^2 w_b &= q / D, \\ w &= w_b - \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{q}{D} \nabla^2 w_b.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Миндлиннің қарапайым ығысу деформация теориясында белгісіз функциялар саны үш болса, бұл теорияда екіге тең болады.

Shimpi [38] мақаласында бір айнымалыға тәуелді төртінші ретті дербес туындымен берілген дифференциалдық теңдеу арқылы анықталатын бірінші ретті ығысу деформациясының жаңа теориясын жариялады.

Huu-Tai Thai және т.б. [40] өз жұмыстарында Shimpi ұсынған теорияны басшылыққа алып изотропты пластиналар үшін жаңа қарапайым ығысу деформациясының теориясын ұсынады. Бұл теория классикалық пластиналар теориясындағыдай бір белгісіз және бір басқарушы теңдеуден тұрады, бірақ ол ығысу деформациясының әсерлерін дәл ескере алады. Берілген теорияда жылжу өрісі екі айнымалыдан тұратын пластинаның нақтыланған теориясына негізделген және көлденең ығысу иілу және ығысу бөліктерінен тұрады. Үш өлшемді серпімділік теориясының тепе-теңдік теңдеулері негізінде иілу және ығысу бөліктері арасында байланыс орнатылды.

Kedar S. Pakhare [41] аз деформацияланатын сызықты серпімді изотропты пластиналардың иілуіне арналған жылжуларға негізделген жаңа бірінші ретті ығысу деформация теориясының екі айнымалы нұсқасын ұсынды. Потенциалдық энергияның стационарлық принципі негізінде негізгі дифференциалдық теңдеулер мен вариациялық сәйкес келетін шекаралық шарттарды алды. Теорияның бұл нұсқасында екі белгісіз функциясы бар бір-бірімен байланысты негізгі екі дифференциалдық теңдеу бар, ал Миндлин теориясында мұндай теңдеу саны үшке тең.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = - \frac{h^2}{6k_{shear}(1-\mu)} \frac{q}{D} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{6k_{shear}(1-\mu)}{h^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] = 0$$

$w(x, y)$ – пластинаның майысу функциясы, $\phi(x, y)$ – бұрылу, k_{shear} – ығысудың түзетуші коэффициент 5/6 тең.

Берілген теория бойынша әр түрлі бекінісі бар төртбұрышты изотропты пластинаға біртекті жайылған жүктеме әсер еткенде иілу есебін шешу үшін Леви әдісі қолданылды. Алынған аналитикалық және сандық зерттеулер нәтижелерге бастапқы белгісіз айнымалылардың санын қысқарту елеулі әсер етпейтінін көрсетілген.

Сонымен қазірге кезде дәлденген теориялардың санының көптігіне карамастан оларды жетілдіру қажеттілігі тұр, себебі теорияның реті жоғарлаған сайын тәуелді айнымалылар саны мен шешу теңдеулер саны да артады. Бұл өз кезегінде күрделі және ұзақ есептеулерге алып келеді.

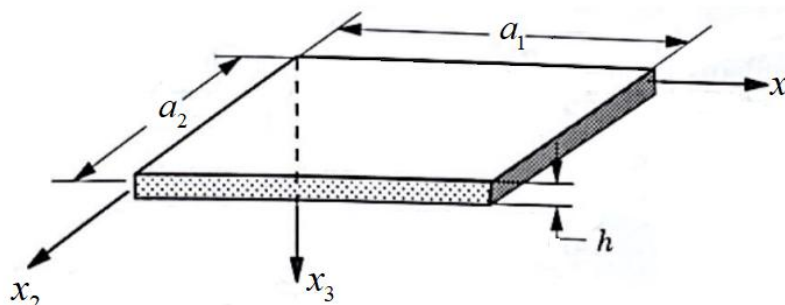
2 КӨЛДЕНЕҢ ЫҒЫСУ ДЕФОРМАЦИЯСЫН ЕСКЕРГЕНДЕГІ ПЛАСТИНАНЫ ЕСЕПТЕУДІҢ ЖЕТІЛДІРІЛГЕН ДӘЛДЕНГЕН ТЕОРИЯСЫ

Берілген бөлімде материалы изотропты жұқа тікбұрышты пластиналардың кернеулік-деформациялық күйін есептейтін жетілдірілген дәлденген теория мен әдісі берілген. Есептеу әдісі көлденең ығысу деформациясы ескерілетін Рейсснер – Миндлин ұсынған болжамдарға негізделген дәлденген теория бойынша жүргізіледі. Әдеттегі шешуші теңдеу санынан қарағанда ұсынылған әдісте шешуші теңдеу саны бірге тең. Есептеу барысында пластина иілуін арқалықтың иілуіне келтіру мақсаты тұр. Бұл үшін пластинаның цилиндрлік қатаңдығын арқалықтың жалпыланған цилиндрлік қатаңдығына алып келу қажет. Берілген есепті шешу үшін Кантарович – Власовтың вариациялық әдісін негізге алынады және арқалықтың иілу теңдеуін пластинаның майысу теңдеуі ретінде қолданылады.

2.1 Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі жетілдірілген дәлденген теория бойынша пластинаның математикалық моделі

2.1.1 Негізгі болжамдар, жылжулар, деформациялар мен кернеулер

Материалы изотропты тікбұрышты пластина үш өлшемді қатты дене ретінде қарастырылады және оған $q(x_1, x_2)$ таралған жүктеме әсер етеді (сурет 2.1). Осы пластинаны $(0 \leq x_1 \leq a_1, 0 \leq x_2 \leq a_2, -\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2})$ координаттық жүйеде қарастырайық: a_1, a_2 - пластинаның (x_1, x_2) координаттық өстер бойындағы өлшемдері (қабырғаларының ұзындықтары); h - x_3 координаттық өс бойындағы өлшемі (пластинаның қалыңдылығы). $x_3 = 0$ жағдайында жазықтық пластинаның орта (бейтарап) жазықтығы болып табылады. Пластинаның $x_1 = 0, x_2 = a_1, x_2 = 0, x_2 = a_2$ шеттері әр түрлі бекіністерге ие не бос болуы мүкін.



Сурет 2.1 – Тікбұрышты пластинаның геометриясы мен координаттық жүйесі

Негізгі болжамдарды мына түрде қабылдаймыз:

1. Орта жазықтыққа нормал болатын кез-келген түзусызықты элемент пластина деформацияланған соң түзусызықты және нормал болмайды, оның ұзындығы сақталады және қалыңдық бойымен параболалық заңдылық бойынша өзгереді. Сондықтан x_3 өсімен (x_1, x_2) өстері арасында ығысу пайда болады және оны келесі заңдылық бойынша өзгеруін қабылдаймыз:

$$\begin{aligned}\gamma_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \gamma_0 n f(z) \frac{\partial W}{\partial x_1}, \\ \gamma_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \gamma_0 n f(z) \frac{\partial W}{\partial x_2}, \\ n &= \frac{E_0}{G}, \quad f(z) = 1 - 4z^2, \quad z = \frac{x_3}{h} \\ E_0 &= \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)},\end{aligned}\tag{2.1}$$

мұнда γ_{13}, γ_{23} – көлденең ығысу деформациясы; γ_0 – көлденең ығысу параметрі; n – серпімділік тұрақтылар параметрі; $f(z)$ – көлденең ығысудың таралу функциясы; z – көлденең өлшемсіз координата, $W(x_1, x_2)$ – жалпы майысу функциясы; E – бойлық модулі; G – ығысу модулі.

2. Деформацияланатын элементтің ұзындығы өзгермейтіндіктен x_3 бағытында сызықтық деформация болмайды, яғни

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0.\tag{2.2}$$

3. Орта жазықтық деформацияланбайды, яғни ол бейтарап болады және оның жылжулары да

$$u_1(x_1, x_2, 0) = 0, \quad u_2(x_1, x_2, 0) = 0.\tag{2.3}$$

4. Орта жазықтыққа параллель қабаттарда қысым болмайды. Бұл болжам бойынша σ_1 және σ_2 кернеулерімен салыстырғанда өте аз болатын σ_3 кернеуін ескермеуге болады, яғни

$$\sigma_3 \approx 0.\tag{2.4}$$

Бірінші болжам бойынша пластинаның майысу функциясы x_3 координатасынан тәуелсіз болатыны шығады

$$u_3(x_1, x_2, 0) = W(x_1, x_2),\tag{2.5}$$

сондықтан пластинаның орта жазықтығының майысуларын анықтау жеткілікті.

Бейтарап жазықтық шарттарын ескере отырып ығысу деформация компоненттерін интегралдау арқылы тангенциалдық жылжуларды анықтаймыз

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= -h \cdot \varphi(z) \cdot \frac{\partial W}{\partial x_1}, \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= -h \cdot \varphi(z) \cdot \frac{\partial W}{\partial x_2}, \\ \varphi(z) &= z - \gamma_0 n \left(z - \frac{4}{3} z^3 \right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

мұндағы $\varphi(z)$ – тангенциалдық жылжулардың таралу функциясы.

(2.4) және (2.5) жылжуларды ескере отырып серпімділік теориясының формулалары бойынша деформацияларды мына түрде анықтаймыз:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -h \cdot \varphi(z) \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}, \quad \gamma_{12} = -2h \cdot \varphi(z) \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -h \cdot \varphi(z) \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}, \quad \gamma_{13} = \gamma_0 \cdot n \cdot f(z) \frac{\partial W}{\partial x_1}, \\ \varepsilon_3 &= 0, \quad \gamma_{23} = \gamma_0 \cdot n \cdot f(z) \frac{\partial W}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

(2.7)-де $\varepsilon_3, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ деформацияларын (2.1), (2.2) болжам бойынша қабылдап аламыз, ал $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$ деформацияларын анықтаймыз.

Пластинаның материалы изотропты болған жағдайда Гуктың жалпы заңдары келесі түрде болады:

$$\sigma_1 = E_0(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad \sigma_2 = E_0(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \quad \sigma_3 = 0; \quad (2.8)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G}, \quad \gamma_{13} = \frac{\tau_{13}^0}{G}, \quad \gamma_{23} = \frac{\tau_{23}^0}{G}.$$

(2.7) деформацияларын (2.8) өрнектерге қойып кернеулер көрсеткіштерін табамыз:

$$\sigma_1 = -E_0 h \varphi(z) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right), \quad \sigma_2 = -E_0 h \varphi(z) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \right); \quad (2.9)$$

$$\tau_{12} = -E_0 h (1 - \nu) \varphi(z) \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \tau_{13}^0 = E_0 \gamma_0 f(z) \frac{\partial W}{\partial x_1}, \quad \tau_{23}^0 = E_0 \gamma_0 f(z) \frac{\partial W}{\partial x_2}.$$

Жоғарыдағы $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12})$ көлденең нормалдық және жанамалық кернеулер көрсеткіштерін

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} &= 0\end{aligned}$$

кернеулік тепе – теңдік теңдеулеріне қойып, оларды интегралдау арқылы келесі кернеулерді аламыз:

$$\begin{aligned}\tau_{13} &= E_0 h^2 \psi(z) \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 W), \quad \psi(\pm \frac{1}{2}) = 0, \\ \tau_{23} &= E_0 h^2 \psi(z) \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla^2 W), \quad \delta(-\frac{1}{2}) = 0, \\ \sigma_3 &= -E_0 h^3 \delta(z) \nabla^2 \nabla^2 W, \quad \delta(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{12} (1 - \frac{4}{5} \gamma_0 n), \\ \psi(z) &= (-\frac{1}{8} + \frac{z^2}{2}) - \gamma_0 n (-\frac{5}{48} + \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{3}), \\ \delta(z) &= (-\frac{1}{24} - \frac{z}{8} + \frac{z^3}{6}) - \gamma_0 n (-\frac{1}{30} - \frac{5}{48} z + \frac{z^3}{6} - \frac{z^5}{15}), \\ \nabla^2 W &= \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}\end{aligned} \tag{2.10}$$

мұнда $\psi(z)$, $\delta(z)$ – жанамалық және нормалдық кернеулердің таралу функциялары, $\nabla^2 W$ – Лаплас операторы.

2.1.2 Пластинаның дифференциалдық тепе – теңдік теңдеуі, ішкі күштері

Пластинаның дифференциалдық тепе-теңдік теңдеуін анықтау үшін көлденең нормалдық кернеудің шекаралық шарттарын қолданамыз

$$z = \frac{1}{2}, \quad \sigma_3 = q(x_1, x_2); \quad z = -\frac{1}{2}, \quad \sigma_3 = 0,$$

мұнда $q(x_1, x_2)$ - пластинаға әсер ететін сыртқы жүктеме.

Осы шартты (2.10) – шы өрнекке енгізу арқылы аламыз

$$\frac{E_0 h^3}{12} (1 - \frac{4}{5} \gamma_0 n) \nabla^2 \nabla^2 W = q(x_1, x_2),$$

немесе жаңадан белгілеу енгізіп пластинаның дифференциалық тепе-теңдік теңдеуін аламыз

$$Dg\nabla^2\nabla^2W = q(x_1, x_2), \quad (2.13)$$

$$g = (1 - \frac{4}{5}\gamma_0 n) \quad (2.13^*)$$

мұнда g – цилиндрлік қатаңдық параметрі.

(2.13) теңдеуге жаңадан белгілеу енгізе отырып пластинаның классикалық теориядағы иілу теңдеуінің түріне келтіріп ала аламыз

$$\nabla^2\nabla^2W - \frac{4}{5}\gamma_0 n\nabla^2\nabla^2W = q(x_1, x_2) / D, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2\nabla^2\tilde{W} &= \gamma_0 n\nabla^2\nabla^2W, & \nabla^2\nabla^2W_0 &= \nabla^2\nabla^2W - \frac{4}{5}\nabla^2\nabla^2\tilde{W} \\ W_0(x_1, x_2) &= W(x_1, x_2) - \frac{4}{5}\tilde{W}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.15)$$

мұнда $\tilde{W}(x_1, x_2)$ – ығысу деформациясы ескерілген майысу функциясы, $W_0(x_1, x_2)$ – классикалық теория бойынша майысу функциясы, D – пластинаның цилиндрлік қатаңдығы.

$W_0(x_1, x_2) = gW(x_1, x_2)$ түрінде белгілеп алсақ (2.13)- теңдеуден классикалық түрде жазылады

$$D\nabla^2\nabla^2W_0 = q(x_1, x_2) \quad (2.16)$$

Жылжу компоненттері мен (2.15) теңдік негізінде нормалдардың бұрылу бұрышын анықтауға болады:

$$\theta_1 = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} u_1 x_3 dx_3 = -g \frac{\partial W}{\partial x_1} = -\frac{\partial W_0}{\partial x_1}, \quad (2.17)$$

$$\theta_2 = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} u_2 x_3 dx_3 = -g \frac{\partial W}{\partial x_2} = -\frac{\partial W_0}{\partial x_2}$$

$\theta_1 - x_1$ өсіне бағытас нормальдің бұрылу бұрышы, $\theta_2 - x_2$ өсіне бағытас нормалдың бұрылу бұрышы.

(2.9) кернеулер және (2.15) теңдікті қолдана отырып ішкі күштерді анықтаймыз:

$$\begin{aligned}
M_1 &= h^2 \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_1 \cdot z dz = -Dg \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_2^2} \right), \\
M_2 &= h^2 \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_2 z dz = -Dg \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1^2} \right), \\
M_{12} &= h^2 \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{12} z dz = -Dg(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1 \partial x_2}; \\
Q_1 &= h \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{13} dz = -Dg \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 W) = -D \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 W_0), \\
Q_2 &= h \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{23} dz = -Dg \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla^2 W) = -D \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla^2 W_0), \\
Q_1^0 &= h \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{13}^0 dz = \frac{2}{3} E_0 h \gamma_0 \frac{\partial W}{\partial x_1}, \\
Q_2^0 &= h \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{23}^0 dz = \frac{2}{3} E_0 h \gamma_0 \frac{\partial W}{\partial x_2}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

мұнда M_1, M_2 – x_1 мен x_2 өстерімен бағытталған иілу моменттері, M_{12} – аталған өстерге қатысты бұралу моменті, Q_1^0, Q_2^0 – x_1 мен x_2 өстеріне перпендикуляр көлденең күштер.

Q_1^0, Q_2^0 және Q_1, Q_2 көлденең күштер тең болады

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3} E_0 h \gamma_0 \frac{\partial W}{\partial x_1} &= -D \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 W_0); \\
\frac{2}{3} E_0 h \gamma_0 \frac{\partial W}{\partial x_2} &= -D \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla^2 W_0)
\end{aligned}$$

егер келесі шарт орындалатын болса:

$$W(x_1, x_2) = -\frac{5}{4} \frac{D}{\mu_0 E_0 h \gamma_0} \nabla^2 W_0, \quad \mu_0 = \frac{5}{6}. \tag{2.19}$$

(2.9) және (2.10) кернеулерді (2.18) ішкі күштер арқылы анықтаймыз:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{12}{h^2} \varphi(z) \frac{M_1}{g}, \quad \sigma_2 = \frac{12}{h^2} \varphi(z) \frac{M_2}{g}, \quad \sigma_3 = \delta(z) \frac{q}{g}; \\
\tau_{12} &= \frac{12}{h^2} \varphi(z) \frac{M_{12}}{g}, \quad \tau_{13} = -\frac{12}{h} \psi(z) \frac{Q_1}{g}, \quad \tau_{23} = -\frac{12}{h} \psi(z) \frac{Q_2}{g}; \\
\tau_{13}^0 &= \frac{3}{2} f(z) \frac{Q_1^0}{h}, \quad \tau_{23}^0 = \frac{3}{2} f(z) \frac{Q_2^0}{h},
\end{aligned} \tag{2.20}$$

мұнда $\sigma_1, \tau_{12}, \sigma_2, \tau_{13}, \tau_{23}, \sigma_3$ - тепе-теңдік теңдеулерін, ал τ_{13}^0, τ_{23}^0 - Гук заңдарын қанағаттандыратын кернеулер.

2.1.3 Көлденең ығысу параметрі мен шекаралық шарттар

Көлденең ығысу параметрін анықтау үшін (2.19)-ды (2.15) формулаға қойып түрлендірулер жасаймыз

$$\begin{aligned} -\frac{5}{4} \frac{D}{\mu_0 E_0 h \gamma_0} \nabla^2 W_0 &= W_0 - \frac{4}{5} \gamma_0 n \cdot \frac{5}{4} \frac{D}{\mu_0 E_0 h \gamma_0} \nabla^2 W_0 \\ W_0 &= \frac{D}{\mu_0 E_0 h} \nabla^2 W_0 \left(n - \frac{5}{4 \gamma_0} \right) \\ \frac{W_0}{\nabla^2 W_0} &= \frac{D}{\mu_0 E_0 h} \left(n - \frac{5}{4 \gamma_0} \right) \end{aligned}$$

немесе тұрақтылардың мәндерін қоя отырып келесі түрде аламыз

$$\gamma_0 = \frac{k^2 h^2}{8 \left(1 + \frac{nk^2 h^2}{10} \right)}. \quad (2.21)$$

мұндағы $k^2 = -\frac{\nabla^2 W_0}{W_0}$ біртекті теңдеудің меншікті санының квадраты.

(2.13*) формуласына анықталған (2.21) көлденең ығысу параметрін қойып g цилиндрлік қатаңдық параметрін мына түрде жазып аламыз

$$g = \frac{1}{1 + \frac{nk^2 h^2}{10}}. \quad (2.22)$$

Табылған (2.21) параметрді (2.19) теңдікке қойып жалпы майысу функциясы көлденең ығысу параметрімен байланысты цилиндрлік қатаңдық параметрі мен классикалық теория бойынша майысу функциясының көбейтіндісі ретінде өрнектеп аламыз

$$W(x_1, x_2) = \left(1 - \frac{D}{\mu_0 G h} \frac{\nabla^2 W_0}{W_0} \right) \cdot W_0 = \frac{1}{g} W_0(x_1, x_2). \quad (2.23)$$

Көлденең ығысу параметрі классикалық теория бойынша майысу функциядан тәуелді болып, атауына сәйкес қайырма-қайшылыққа әкеп тұр. Бұл қарама-қайшылықтан құтылу үшін W_0 майысу функциясына қатысты келесі теңдеуді қарастырайық:

$$\nabla^2 W_0 + k^2 W_0 = 0 \quad (2.24)$$

k^2 – анықталатын меншікті сан.

k^2 меншікті санды анықтау үшін W_0 функциясын мына түрде аламыз

$$W_0(x_1, x_2) = \hat{W} \cdot X(x) \cdot Y(y), x = x_1/a_1, y = x_2/a_2 \quad (2.25)$$

мұнда $\hat{W}$ – майысудың амплитудулық мәні, x, y – өлшемсіз координаталар.

(2.25)-ті (2.24)-ге қойып меншікті санды аламыз

$$k^2 = -\left(\frac{1}{a_1^2} \frac{X''}{X} + \frac{1}{a_2^2} \frac{Y''}{Y} \right).$$

Мына теңдеулер орындалған жағдайда

$$X''(x) = -k_1^2 X(x); \quad Y''(y) = -k_2^2 Y(y) \quad (2.26)$$

берілген меншікті сан мына түрде жазылады

$$k^2 = \frac{k_1^2}{a_1^2} + \frac{k_2^2}{a_2^2}. \quad (2.27)$$

(2.26) теңдеу үшін шешімді $X(x) = C_1 \cos k_1 x + C_2 \sin k_1 x$; $Y(y) = C_3 \cos k_2 y + C_4 \sin k_2 y$ түрінде әр түрлі бекіністердің шекаралық шарттарын ескере отырып анықтаймыз:

1. Көлденең қима шеттері бекітілген. Бұл жағдайда келесі шарттар орындалады:

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\rightarrow C_1 = 0; \quad Y(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0; \\ X(1) = 0 &\rightarrow C_2 \sin k_1 = 0 \rightarrow k_1 = \pi, C_2 = X_0; \\ Y(1) = 0 &\rightarrow C_4 \sin k_2 = 0 \rightarrow k_2 = \pi, C_4 = Y_0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Берілген шекаралық шартта шешім мына түрде болады

$$X(x) = X_0 \sin \pi x; \quad Y(y) = Y_0 \sin \pi y.$$

2. Бір шеті бекітілген, ал екіншісі бос. Бұл жағдайда келесі шарттар орындалады

$$X(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0; \quad Y(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0;$$

$$X(1)=1, C_2=X_0 \rightarrow 1=\sin k_1 \rightarrow k_1=\frac{\pi}{2}; \quad (2.29)$$

$$Y(1)=1 \rightarrow C_4=Y_0 \rightarrow 1=\sin k_2 \rightarrow k_2=\frac{\pi}{2}.$$

Ал шешім келесі түрде жазылады

$$X(x)=X_0 \sin \frac{\pi x}{2}; \quad Y(y)=Y_0 \sin \frac{\pi y}{2}.$$

3. Көлденең қима шеттері бос болған жағдайда келесі шарттар орындалады

$$\begin{aligned} X(0) &= X_0 \rightarrow C_1 = X_0; \quad Y(0) = Y_0 \rightarrow C_3 = Y_0; \\ X(1) &= X_0 \rightarrow C_2 = \frac{1 - \cos k_1}{\sin k_1}; \quad Y(1) = Y_0 \rightarrow C_4 = \frac{1 - \cos k_2}{\sin k_2}; \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$X\left(\frac{1}{2}\right) = 2X_0 \rightarrow 2 = \frac{1}{\cos \frac{k_1}{2}} \rightarrow k_1 = \frac{2}{3}\pi;$$

$$Y\left(\frac{1}{2}\right) = 2Y_0 \rightarrow 2 = \frac{1}{\cos \frac{k_2}{2}} \rightarrow k_2 = \frac{2}{3}\pi.$$

Есептің шешімі мына түрде болады

$$\begin{aligned} X(x) &= X_0 \left\{ \cos \frac{2\pi x}{3} + \frac{1 - \cos k_1}{\sin k_1} \sin \frac{2\pi x}{3} \right\}; \\ Y(y) &= Y_0 \left\{ \cos \frac{2\pi y}{3} + \frac{1 - \cos k_2}{\sin k_2} \sin \frac{2\pi y}{3} \right\}. \end{aligned}$$

(2.28)-(2.30) формулалар негізінде k_1 параметрін мына түрде жазып алуға болады

$$k_1 = m_i \pi, \quad m_1 = 1, \quad m_2 = \frac{1}{2}, \quad m_3 = \frac{2}{3}, \quad (2.31)$$

мұндағы i – нұсқа номері.

Осы сияқты k_2 параметрі үшін жазып аламыз

$$k_2 = n_j \pi, \quad n_1 = 1, \quad n_2 = \frac{1}{2}, \quad n_3 = \frac{2}{3}, \quad (2.32)$$

мұндағы j – нұсқа номері.

(2.27) параметрді (2.31) және (2.32) ескеріп мына түрде жазып аламыз:

$$k^2 = \frac{\pi^2}{a_1 a_2} \left[\frac{a_2}{a_1} m_i^2 + \frac{a_1}{a_2} n_i^2 \right]. \quad (2.33)$$

Сонымен, көлденең ығысу деформациясын ескере отырып пластинаның жалпы майысуын есептеу үшін классикалық теорияда белгілі шешімді және көлденең ығысу параметріне тәуелді цилиндрлік қатаңдық параметрін анықтау қажет.

Пластинаның жақтарында ($x_1, x_2 = const$) түрлі бекіністерені байланысты шекаралық шарттардың негізгі түрлері келесі болады:

- топсалы тірелгенде

$$W_0 = 0, M_1 = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1^2} = 0, \theta_2 = 0 \rightarrow \frac{\partial W_0}{\partial x_2} = 0; \quad (2.34)$$

- қатаң бекітілгенде

$$W_0 = 0, \theta_1 = 0 \rightarrow \frac{\partial W_0}{\partial x_1} = 0; \theta_2 = 0 \rightarrow \frac{\partial W_0}{\partial x_2} = 0; \quad (2.35)$$

- серпінді тірелгенде

$$\theta_1 = 0 \rightarrow \frac{\partial W_0}{\partial x_1} = 0; M_1 = -D \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_2^2} \right) = 0; M_{12} = 0; \quad (2.36)$$

- бос, яғни байланыстар болмағанда

$$Q_1 = 0; M_1 = 0; M_{12} = 0. \quad (2.37)$$

(2.34)-(2.36) шекаралық шарттарды талдау нәтижесінде үшінші шарт бірінші шарттың салдары болатыны шығады. Алайда (2.37) шарт үшін бұлай бірден айтуға болмайды. Сондықтан келесі түрлендірулер жасаймыз.

(2.18) көлденең күшті (2.24) теңдеуді ескере отырып мына түрде жазып аламыз:

$$Q_1 = -D \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 W_0) = Dk^2 \frac{\partial W_0}{\partial x_1};$$

$$Q_2 = -D \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla^2 W_0) = Dk^2 \frac{\partial W_0}{\partial x_2};$$

Дифференциалдап және бұралу моментін ескере отырып алатынымыз:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_2} = Dk^2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{k^2}{1-\nu} M_{12}; \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x_1} = Dk^2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{k^2}{1-\nu} M_{12}.$$

Белгілі (2.33) параметр негізінде (2.38)-де бұралу моментін көлденең күш арқылы өрнектеп аламыз

$$M_{12} = -\frac{1-\nu}{k^2} a_1 a_2 \frac{\partial Q_1}{\partial x_2}, \quad M_{12} = -\frac{1-\nu}{k^2} a_1 a_2 \frac{\partial Q_2}{\partial x_1}, \quad (2.39)$$

мұндағы бірінші өрнек бос шеттегі бұралу моментін x_2 осі бойынша есептегенде қолданылады, ал екінші өрнек x_1 осі үшін.

(2.39) бірінші өрнегін (2.38) қойып, үшінші шарт бірінші шарттың салдары болатынына көз жеткіземіз және бекініссіз шет үшін қолданылатынын ескереміз.

Сонымен, ұсынылған жетілдірілген теорияның басқа теориялардан айырмашылығы есептеу формулалары классикалық теориядағыдай болатындығында. Параметр ретінде өрнектелген көлденең ығысу деформациясын пластинаның классикалық теориясының кез-келген анықталған шешіміне көбейте отырып дәлденген нәтиже алуға болады [42, 43].

2.2 Тік бұрышты пластинаны есептеуде айнымалылар бөлу әдісі мен арқалық функцияларын қолдану

2.2.1 Пластинаны айнымалылар бөлу әдісі бойынша есептеу

Көлденең ығысу деформациясы ескерілген дәлденген теория бойынша пластинаның кернеулік және деформациялық күйлерін анықтау үшін классикалық теорияда белгілі шешімдерді қолдануға болады.

Классикалық теорияда белгілі пластина иілу есебінің дәл шешімдері тек кейбір дербес жағдайларда алынған, әдетте қалыңдығы тұрақты және конфигурациясы қарапайым болатын, белгілі бір шекаралық шарттарға ие пластиналарға қатысты (Навье әдісі, Леви әдісі). Вариациялық есептеудің тура әдістерін (Ритц әдісі, Бубнов-Галерикін әдісі, Кантарович-Власов әдісі) қолдану арқылы күрделі шекаралық шарттары бар пластинаның иілу есебінің жуық шешімдерін алуға мүмкіндік бар.

Кантарович-Власов әдісі көмегімен дербес туындылары бар теңдеулерден қарапайым дифференциалдық теңдеулерге жуықтап көшуге болады.

Пластинаның классикалық теория бойынша майысу функциясын және көлденең таралған жүктемені мына түрде аламыз:

$$W_0(x_1, x_2) = \alpha_0 W_* f(x, y), \quad f(x, y) = X(x)Y(y), \quad W_* = \frac{q_0 a_1^2 a_2^2}{D},$$

$$q(x_1, x_2) = q_0 p u(x, y), \quad x = \frac{x_1}{a_1}, \quad y = \frac{x_2}{a_2}, \quad (2.40)$$

мұнда α_0 - максималды майысудың параметрі; W_* - майысудың көбейткіші; $f(x, y)$ - майысудың өлшемсіз функциясы; $X(x), Y(y)$ - майысудың нормаланған өлшемсіз арқалық функциялары; q_0 - көлденең таралған жүктеменің максималды қарқындылығы; $p u(x, y)$ - сыртқы жүктеменің өзгері заңы; x, y - өлшемсіз координаталар.

Пластинаның (θ_1, θ_2) бұрылу (көлбеу) бұрыштары келесі түрде анықталады:

$$\theta_1 = \frac{\partial W_0}{\partial x_1} = \alpha_0 \theta_1^0 \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \theta_1^0 = \frac{W_*}{a_1},$$

$$\theta_2 = \frac{\partial W_0}{\partial x_2} = \alpha_0 \theta_2^0 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \theta_2^0 = \frac{W_*}{a_2}. \quad (2.41)$$

мұнда θ_1, θ_2 - координаттық өстер (x_1, x_2) бойындағы пластинаның көлденең кимасының бұрылу бұрыштары;

Қисықтықтар (ξ_1, ξ_2) мен бұрылу (ξ_{12}) табылады:

$$\xi_1 = \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1^2} = \alpha_0 \xi_1^0 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \xi_1^0 = \frac{W_*}{a_1^2},$$

$$\xi_2 = \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_2^2} = \alpha_0 \xi_2^0 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \xi_2^0 = \frac{W_*}{a_2^2},$$

$$\xi_{12} = \frac{\partial^2 W_0}{\partial x_1 \partial x_2} = \alpha_0 \xi_{12}^0 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \xi_{12}^0 = \frac{W_*}{a_1 a_2}, \quad (2.42)$$

мұнда ξ_1, ξ_2 - координаттық өстер (x_1, x_2) бойындағы пластинаның талшықтарының майысуын сипаттайтын шамалар; ξ_{12} - олардың осы бағыттардағы бұрылуын сипаттайтын шама.

Іілу (M_1, M_2) мен бұралу (M_{12}) моменттері анықталады:

$$M_1 = -m_1(x, y) M_1^0, \quad m_1(x, y) = \alpha \left(\frac{1}{m^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right), \quad M_1^0 = q_0 a_1^2,$$

$$M_2 = -m_2(x, y) M_2^0, \quad m_2(x, y) = \alpha \left(m^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right), \quad M_2^0 = q_0 a_2^2, \quad (2.43)$$

$$M_{12} = -m_{12}(x, y)M_{12}^0, \quad m_{12}(x, y) = (1 - \nu)\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad M_{12}^0 = q_0 a_1 a_2, \quad m^2 = \frac{a_1^2}{a_2^2},$$

мұнда M_1, M_2 - координаттық өстер (x_1, x_2) бойымен бағытталған иілу моменттері; M_{12} - осы бағыттардағы пластинаның талшықтарын бұрайтын момент; D, h - пластинаның цилиндрлік қатаңдығы және қалыңдылығы; E, ν - пластинаның материалының серпімділік модулі мен Пуассон коэффициенті.

Көлденең күштер (Q_1, Q_2) табылады:

$$Q_1 = -q_1(x, y)Q_1^0, \quad q_1(x, y) = \alpha_0 \left(\frac{1}{m^2} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right), \quad Q_1^0 = q_0 a_1, \quad (2.44)$$

$$Q_2 = -q_2(x, y)Q_2^0, \quad q_2(x, y) = \alpha_0 \left(m^2 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \right), \quad Q_2^0 = q_0 a_2,$$

мұнда Q_1, Q_2 - координаттық өстерге (x_1, x_2) перпендикуляр көлденең күштер.

Пластинаның (2.13) тепе-теңдік теңдеуін (2.40) өрнегін қолдана отырып ішкі (P) және сыртқы (q) күштердің қарқындылықтары мына түрде жазып аламыз:

$$P_0 \cdot S(x, y) = q(x_1, x_2),$$

$$P_0 = \alpha_0 \frac{DW_*}{a_1^2 a_2^2}, \quad S(x, y) = \frac{1}{m} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + m \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}, \quad \alpha_0 = \frac{A_0}{A} \quad (2.45)$$

мұнда $S(x, y), pu(x, y)$ - ішкі және сыртқы күштердің қарқындылықтарының таралу функциялары; R, R_0 - ішкі және сыртқы күштердің тең әсерлі күштері.

Тепе-теңдік шарттарын тексереміз:

- сыртқы және ішкі жүктемелердің теңдігі:

$$P_0 \cdot S(x, y) = q_0 pu(x, y);$$

$$P_0 \cdot S(x_0, y_0) = q_0 \cdot pu(x_0, y_0); \quad (2.46)$$

- сыртқы және ішкі жүктемелердің тең әсерлі күштерінің теңдігі:

$$P_0 \cdot R = q_0 \cdot R_0; \quad R = \int_0^1 \int_0^1 S(x, y) dx dy; \quad R_0 = \int_0^1 \int_0^1 pu(x, y) dx dy; \quad (2.47)$$

- сыртқы және ішкі жүктемелердің жұмыстарының теңдігі:

$$P_0 \cdot A = q_0 \cdot A_0; \quad A = \int_0^1 \int_0^1 S(x, y) \cdot f(x, y) dx dy; \quad A_0 = \int_0^1 \int_0^1 pu(x, y) \cdot f(x, y) dx dy; \quad (2.48)$$

мұнда R, R_0 - ішкі және сыртқы күштердің тең әсерлі күштері; A, A_0 - олардың жұмыстары.

Пластинаның (2.34)-(2.37) шекаралық шарттарына айнымалаларды бөлу әдісін қолданып төмендегі түрге келтіреміз: ($x=0$ жағдайын қарастырайық)

- топсалы тірелгенде ($x=0$)

$$\begin{aligned} W_0 &= \alpha_0 W_* f(x, y) = 0; \quad f(0, y) = 0; \\ M_1 &= -m_1(x, y) M_1^0 = 0, \quad m_1(0, y) = 0; \\ \theta_2 &= \alpha_0 \theta_2^0 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f(0, y)}{\partial y} = 0; \end{aligned} \quad (2.49)$$

- қатты бекінген жағындағы ($y=0$)

$$\begin{aligned} W &= W_* f(x, 0) = 0; \quad f(x, 0) = 0; \\ \theta_2 &= \theta_2^0 \frac{\partial f(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f(x, 0)}{\partial y} = 0; \\ \theta_1 &= \theta_1^0 \frac{\partial f(x, 0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x, 0)}{\partial x} = 0; \end{aligned} \quad (2.50)$$

- серпінді тірелген жағындағы ($x_2 = a_2$)

$$\begin{aligned} m_1(x) &= X''(x) - r_2 X(x), \\ q_1(x) &= X'''(x) - S_2 X'(x), \\ r_2 &= k_y^2 m^2 \nu_{21}, \quad S_2 = k_y^2 m^2 \frac{\gamma_{21}^0}{\gamma_1^0}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} m_2(y) &= Y''(y) - r_1 Y(y), \\ q_2(y) &= Y'''(y) - S_1 Y'(y), \\ r_1 &= \frac{k_x^2}{m^2} \nu_{12}, \quad S_1 = \frac{k_x^2}{m^2} \frac{\gamma_{12}^0}{\gamma_2^0}, \end{aligned}$$

- бос (бекініссіз) жағындағы ($x_1 = a_1$)

$$\begin{aligned} M_1 &= -m_1(x, y) M_1^0 = 0, \quad m_1(0, y) = 0; \\ Q_1 &= -q_1(x, y) Q_1^0, \\ M_{12} &= -m_{12}(x, y) M_{12}^0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Тангенциалдық жыжуларды анықтау үшін (2.40)-ты ескере отырып (2.5), (2.6) және (2.23) өрнектерін қолданамыз

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{\alpha_0}{g} \varphi(z) \frac{\partial f}{\partial x} u_1^0, \quad u_1^0 = \frac{h}{\ell_1} W_*, \\
u_2(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{\alpha_0}{g} \varphi(z) \frac{\partial f}{\partial y} u_2^0, \quad u_2^0 = \frac{h}{\ell_2} W_*, \\
u_3(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\alpha_0}{g} f(x, y) W_*.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

(2.20) кернеулерді (2.43), (2.44) ішкі күштер арқылы анықтаймыз:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= -\sigma_1^0 \frac{12}{g} \varphi(z) m_1(x, y), \quad \sigma_1^0 = \frac{M_1^0}{h^2}; \\
\sigma_2 &= -\sigma_2^0 \frac{12}{g} \varphi(z) m_2(x, y), \quad \sigma_2^0 = \frac{M_2^0}{h^2}; \\
\sigma_3 &= \frac{\delta(z)}{g} q(x, y). \\
\tau_{12} &= -\tau_{12}^0 \frac{12}{g} \varphi(z) m_{12}(x, y), \quad \tau_{12}^0 = \frac{M_{12}^0}{h^2}; \\
\tau_{13} &= -\tau_{13}^0 \frac{3}{2g} \psi(z) q_1(x, y), \quad \tau_{13}^0 = \frac{Q_1^0}{h}; \\
\tau_{23} &= -\tau_{23}^0 \frac{3}{2g} \psi(z) q_2(x, y), \quad \tau_{23}^0 = \frac{Q_2^0}{h}. \\
\varphi(z) &= z - \gamma_0 n(z - \frac{4}{3} z^3), \\
\psi(z) &= (-\frac{1}{8} + \frac{z^2}{2}) - \gamma_0 n(-\frac{5}{48} + \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{3}), \\
\delta(z) &= (-\frac{1}{24} - \frac{z}{8} + \frac{z^3}{6}) - \gamma_0 n(-\frac{1}{30} - \frac{5}{48} z + \frac{z^3}{6} - \frac{z^5}{15}).
\end{aligned} \tag{2.54}$$

2.2.2 Пластинаны есептеуде қолданылатын арқалық функциялары

Пластинаны шексіз горизонтал және вертикал жолақ арқалықтардан тұратын жиынтық түрінде қабылдап, сол арқалықтардың белгілі иілім функцияларына негізделіп пластинаны шешімін аналитикалық түрде алуға болады. Пластинаның өлшемсіз майысу функциясын арқалықтардың өлшемсіз иілім функцияларының көбейтіндісі түрінде алып, максималды майысу параметрін сыртқы жүктеме мен ішкі күштердің теңәсерлі күштерінің қатынасы ретінде анықтауға мүмкіндік береді.

Арқалықтардың өлшемсіз иілім функцияларын анықтау үшін көлденең бағытта $X^{IV}(x) = p(x)$ және сәйкесінше тік бағытта $Y^{IV}(y) = p(y)$ теңдеулерін интегралдап, шекаралық шарттарды ескере отырып табылады.

Пластинаның сыртқы жүктеменің өзгеру (2.20) заңын жазып аламыз:

$$p(x, y) = p(x)p(y), \tag{2.55}$$

мұнда $pu(x)$ - x өсі бойынша жүктеменің өзгеру заңы (горизонтал арқалықтың жүктемесінің өзгеру заңы); $pu(y)$ - y өсі бойынша жүктеменің өзгеру заңы (вертикал арқалықтың жүктемесінің өзгеру заңы).

Пластинадан горизонтал талшығын бөліп алып оның тепе-теңдігін қарастырамыз. Бұл талшықты арқалық ретінде алып, оның тепе-теңдік теңдеуін және интегралдарын мына түрде жазып аламыз:

$$\begin{aligned} X_0^{IV}(x) &= pu(x), \\ X_0^{III}(x) &= qu(x) + c_1, \quad qu(x) = \int_0^x pu(x)dx, \\ X_0''(x) &= tu(x) + c_1x + c_2, \quad tu(x) = \int_0^x qu(x)dx, \\ X_0'(x) &= u(x) + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3, \quad u(x) = \int_0^x tu(x)dx, \\ X_0(x) &= Wu(x) + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3x + c_4, \quad Wu(x) = \int_0^x u(x)dx. \end{aligned} \quad (2.56)$$

мұнда $c_1 - c_4$ - төмендегі шекаралық шарттардан анықталатын тұрақтылар.

Берілген (2.47) – (2.50) шекаралық шарттарды (2.40) майысу функциясының өрнегіне қолдану арқылы келесі жағдайлар қарастырылып алынған арқалық иілім функциялары:

1. Екі шеті топсалы бекітілген:

$$\begin{aligned} &[X_0(0) = X_0''(0) = X_0(1) = X_0''(1) = 0] \\ X_0(x) &= Wu(x) - tu(1) \frac{x^3}{6} + \left[-Wu(1) + \frac{tu(1)}{6} \right] x; \end{aligned} \quad (2.57)$$

2. Екі шеті қатты бекітілген арқалық үшін

$$\begin{aligned} &[X_0(0) = X_0'(0) = X_0(1) = X_0'(1) = 0] \\ X_0(x) &= Wu(x) + 2[Wu(1) - 0,5tu(1)]x^3 + [-3Wu(1) + tu(1)]x^2; \end{aligned} \quad (2.58)$$

3. Статикалық анықталмаған арқалық үшін

$$\begin{aligned} &[X_0(0) = X_0'(0) = X_0(1) = X_0''(1) = 0] \\ X_0(x) &= Wu(x) + 0,5[Wu(1) - 0,5tu(1)]x^3 + [-1,5Wu(1) + 0,25tu(1)]x^2; \end{aligned} \quad (2.59)$$

4. Екі шеті бос жағдайда

$$\begin{aligned}
& [m_1(0) = q_1(0) = m_1(1) = q_1(1) = 0]; \\
& c_1 = S_2 c_3, \quad c_2 = r_2 c_4, \\
& c_3 = \frac{-mu(1) + r_2 Wu(1) + \frac{r_2}{2S_2} [qu(1) - S_2 tu(1)]}{(S_2 - r_2 + \frac{r_2 S_2}{12})} \\
& c_4 = \frac{1}{r_2 S_2} [qu(1) - S_2 tu(1)] - \frac{S_2}{2r_2} c_3,
\end{aligned} \tag{2.60}$$

5. Бір шеті топсалы, екіншісі бос

$$\begin{aligned}
& [X_0(0) = X_0''(0) = m_1(1) = q_1(1) = 0]; \\
& c_4 = 0, \quad c_2 = 0, \\
& c_3 = \frac{1}{r_2} [mu(1) - r_2 Wu(1)] + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{r_2}\right) c_1, \\
& c_1 = \frac{-qu(1) + S_2 tu(1) + \frac{S_2}{r_2} [mu(1) - r_2 Wu(1)]}{\left(1 - \frac{S_2}{3} - \frac{S_2}{r_2}\right)}.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

6. Бір шеті қатты бекітілген, екіншісі бос

$$\begin{aligned}
& [X_0(0) = X_0'(0) = m_1(1) = q_1(1) = 0] \\
& c_4 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{S_2} [qu(1) - S_2 tu(1)] + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{2}\right) c_1; \\
& c_1 = \frac{-mu(1) + r_2 Wu(1) + \left(-\frac{1}{S_2} + \frac{r_2}{2S_2}\right) [qu(1) - S_2 tu(1)]}{\left[\left(1 - \frac{r_2}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{S_2}\right) + \frac{r_2}{3}\right]}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

7. Екі шеті серпімді тірелген

$$\begin{aligned}
& [X_0'(x) = m_1(0) = X_0^1(1) = m_1(1) = 0] \\
& c_3 = 0, \quad c_2 = mc_4, \quad c_1 = -2tu(1) - 2r_2 c_4; \\
& c_4 = \frac{mu(1) - r_2 Wu(1) - \left(2 - \frac{r_2}{3}\right) tu(1)}{2r_2 + \frac{r_2^2}{6}}
\end{aligned} \tag{2.63}$$

8. Бір шеті топсалы, екіншісі серпімді тірелген

$$\begin{aligned} & \left[X_0(x) = X_0''(0) = X_0'(1) = m_1(1) = 0 \right] \\ & c_4 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_2 = -tu(1) - \frac{c_1}{2}; \\ & c_1 = \frac{-mu(1) + r_2 Wu(1) - r_2 tu(1)}{\left(1 + \frac{r_2}{3}\right)} \end{aligned} \quad (2.64)$$

9. Бір шеті қатты бекітілген, ал екіншісі серпімді тірелген

$$\begin{aligned} & \left[X_0(x) = X_0'(x) = X_0'(1) = m_1(1) = 0 \right] \\ & c_4 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_2 = -tu(1) - \frac{c_1}{2}; \\ & c_1 = \frac{-mu(1) + r_2 Wu(1) + \left(1 - \frac{r_2}{2}\right)tu(1)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{r_2}{12}\right)} \end{aligned} \quad (2.65)$$

10. Бір шеті серпімді тірелген, ал екіншісі бос

$$\begin{aligned} & \left[X_0'(0) = m_1(0) = q_1(1) = m_1(1) = 0 \right] \\ & c_3 = 0, \quad c_2 = mc_4, \\ & c_4 = \frac{1}{r_2 S_2} [qu(1) - S_2 tu(1)] + \left(\frac{1}{r_2 S_2} - \frac{1}{2r_2} \right) c_1; \\ & c_1 = \frac{-mu(1) + r_2 Wu(1) + \frac{r_2}{2S_2} [qu(1) - S_2 tu(1)]}{\left(1 + \frac{r_2}{12} - \frac{r_2}{2S_2}\right)} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Алынған функцияларды нормалау қажет, ол үшін максималды майысу пайда болатын координатаны мына шарттан табамыз:

$$X_0'''(x_0) = 0; \quad (2.67)$$

және майысудың нормаланған функциясын келесі формула бойынша анықтаймыз:

$$X(x) = \frac{X_0(x)}{X_0(x_0)}. \quad (2.68)$$

Пластинаның y бағытында талшықтарының майысу функциясын алу үшін $r_2 \rightarrow r_1$, $s_2 \rightarrow s_1$, $x \rightarrow y$, $X_0(x) \rightarrow Y_0(y)$ ауыстыруларын жасау қажет.

Сонымен пластинаның шексіз тік және көлденең арқалықтардың жиынтығы ретінде бейнеленуі иілу пластиналарының есептеулерінде арқалықты иілу мәселелерінің нақты шешімдерін қолдануға мүмкіндік беретінін атап өткен жөн [44]. Ұсынылған әдістің қолданыстағы әдістерден айырмашылығы – бұл әдістерде функцияны табудың орнына бұл әдісте параметр табылып, қарапайым көпмүшелерде аналитикалық түрде иілу есебінің шешімін алуға мүмкіндік береді. [45]

2.3 Тік бұрышты пластинаның кернеулік-деформациялық күйін есептеу алгоритмі

Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі тікбұрышты пластинаны есептеудің жетелдірілген әдісінің алгоритмі айнымалыларды бөлу әдісі мен арқалықтардың иілім функцияларын қолдануға негізделіп келесі қадамдарды орындаудан тұрады:

1. Пластинаның геометриясы мен материалын анықтау: пластинаның a_1 ұзындығы, a_2 ені және h биіктігін; E серпімділік модулі, ν Пуассон коэффициентін, G ығысу модулін.
2. Айнымалыларды бөлу әдісін қолданып пластинаның классикалық теориясы бойынша (2.40) түрінде шешімді алу қажет. Ол үшін пластинаның шеттеріндегі бекіністерге байланысты (2.47)-(2.50) шекаралық шарттарына ескере отырып белгілі (2.56)-(2.66) арқалықтың өлшемсіз иілім функцияларын x және y бағыты үшін анықтап аламыз.
3. Біртекті теңдеулердің k меншікті сандары (2.28) – (2.30) бойынша анықталады, g цилиндрлік қатаңдық параметрі (2.22) мен γ_0 көлденең ығысу параметрі (2.21) бойынша табылады.
4. Көлденең ығысуды ескергендегі u_1, u_2, u_3 жылжулар компоненттері (2.53) есептеледі.
5. Пластинаның $M_1, M_2, M_{12}, Q_1, Q_2$ ішкі күштері (2.43), (2.44) бойынша анықталады.
6. Пластинаның $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}$ кернеулер компоненттері (2.54) бойынша анықталады.
7. Пластинаның контурының тік реакциялары және олардың тең әсер күштері, пластинаның контурының толық тік реакциясы тексеріледі.

Осы алгоритм бойынша есептелген пластиналардың мысалдары жұмыстың төртінші бөлімінде беріледі.

Тарау бойынша қорытынды

1. Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі дәлденген теорияның жетілдірілген нұсқасы бойынша тікбұрышты пластинаның математикалық моделі құрылды. Көлденең ығысу деформациясы параметр ретінде қабылданды. Пластинаның цилиндрлік қатаңдығын көлденең ығысу

деформация параметрімен байланыстырылды, ол арқылы негізгі шешуші теңдеу саны бірге тең болады және классикалық теорияның шешуші теңдеудің формасына ие. Пластинаның дәлденген теориясының шешімін алу үшін классикалық теорияның белгілі шешімін қолданамыз.

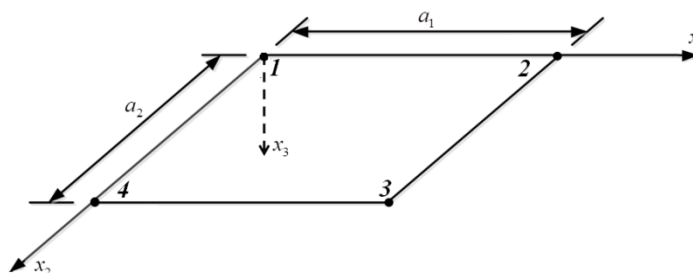
2. Параметр ретінде қарастырылып отырған көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаның есептеудің әдісі құрылды. Оның негізінде айнымалыларды бөлу әдісі жатыр. Пластинаны горизантал және вертикал бағытта шексіз жолақ-арқалықтардан тұратын жүйе ретінде алып, арқалықтардың иілім функциялары анықталды. Пластина жақтары топсалы, қатты, серпімді бекіністерге ие және бос болғанда шекаралық шарттарды ескере отырып, арқалықтың иілім функциясының мүмкін болатын 10 нұсқасының шешімі жалпы түрде алынды. Бұл арқылы 55 түрлі бекітілген пластинаны есептеу мүмкіндігі бар.

3. Тікбұрышты пластинаның кернеулік-деформациялық күйін анықтайтын алгоритм жасалды, ол бойынша серпімділік теорияның тепе-теңдік теңдеулері қанағаттандырылады және пластинаның барлық шекаралық шарттары орындалады.

3 КӨЛДЕНЕҢ ЫҒЫСУ ДЕФОРМАЦИЯСЫН ЕСКЕРГЕНДЕГІ ПЛАСТИНАНЫ АҚЫРЛЫ ЭЛЕМЕНТТЕР ӘДІСІМЕН ЕСЕПТЕУ

3.1 Изотропты пластинаның иілуіндегі төртбұрышты ақырлы элементі, қатаңдық матрицасы мен жүк векторы.

Пластинадан төртбұрышты элементті бөліп алып, түйіндерін белгілеп, (x_1, x_2, x_3) координаттар жүйесінде жеке қарастырайық (сурет 3.1).



Сурет 3.1 – Пластинаның төртбұрышты ақырлы элементі

Ақырлы элементтің кез келген түйінінде келесі жылжулар пайда болады: бірінші - түйіннің x_3 өсі бойындағы тік жылжуы (w), екінші - x_2 өсі бойындағы бұрыштық жылжу $\left(\varphi = \frac{\partial w}{\partial x}\right)$, үшінші - x_1 өсі бойындағы бұрыштық жылжу $\left(\psi = \frac{\partial w}{\partial y}\right)$.

i түйінінің жылжу векторын жоғарыдағы жылжуларды ескере отырып, келесі түрде жазамыз:

$$\vec{V}_i = \begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ \psi_i \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Берілген элементтің жылжу векторын (3.1) формуласын қолданып, келесі түрде анықтаймыз:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \\ \vec{V}_4 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Жұқа пластинаның сыртқы күш әсер етпегендегі дифференциалдық тепе-теңдік теңдеуін қолданып, ақырлы элементтің пішін функциясын анықтаймыз:

$$\nabla^2 \nabla^2 W = 0 \quad (3.3)$$

мұнда $W(x, y)$ - жұқа пластинаның майысу функциясы немесе ақырлы элементтің пішін функциясы деп атаймыз.

Бұл теңдеудің шешімін төртінші дәрежелі толықсыз полином арқылы іздестіреміз:

$$W(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (3.4)$$

$\alpha_1 - \alpha_{12}$ коэффициенттерді анықтау үшін берілген элементтің төрт түйінінің жылжулары белгілі деп (3.4) формуласын қолданып шекаралық шарттарды мына түрде жазамыз:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1}{a}; \quad y = \frac{x_2}{b} \\ 1) \quad x=0; y=0; W(0,0) &= W_1 = \alpha_1; \\ 2) \quad x=0; y=0; \varphi(0,0) &= \frac{\partial W}{\partial x} = a\varphi_1 = \alpha_2; \\ 3) \quad x=0; y=0; \psi(0,0) &= \frac{\partial W}{\partial y} = b\psi_1 = \alpha_3; \\ 4) \quad x=1; y=0; W(1,0) &= W_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_7; \\ 5) \quad x=1; y=0; \varphi(1,0) &= \varphi_2 a = \alpha_2 + 2\alpha_4 + 3\alpha_7; \\ 6) \quad x=1; y=0; \psi(1,0) &= \psi_2 b = \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_8 + \alpha_{11}; \\ 7) \quad x=1; y=1; W(1,1) &= W_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 + \alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12}; \\ 8) \quad x=1; y=1; \varphi(1,1) &= \varphi_3 a = \alpha_2 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8 + \alpha_9 + 3\alpha_{11} + \alpha_{12}; \\ 9) \quad x=1; y=1; \psi(1,1) &= \psi_3 b = \alpha_3 + \alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_8 + 2\alpha_9 + 3\alpha_{10} + \alpha_{11} + 3\alpha_{12}; \\ 10) \quad x=0; y=1; W(0,1) &= W_4 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_{10}; \\ 11) \quad x=0; y=1; \varphi(0,1) &= \varphi_4 a = \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_9 + \alpha_{12}; \\ 12) \quad x=0; y=1; \psi(0,1) &= \psi_4 b = \alpha_3 + 2\alpha_6 + 3\alpha_{10}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

(3.5) шекаралық шарттарды матрицалық түрде жазуға болады:

$$\begin{aligned} C \cdot \vec{\alpha} &= \vec{V}, \\ \vec{\alpha}^T &= [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8 \quad \alpha_9 \quad \alpha_{10} \quad \alpha_{11} \quad \alpha_{12}]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

мұнда C - тұрақты белгісіздер алдындағы коэффициенттерден құралған матрица.

(3.6) өрнектен тұрақты белгісіздер векторын кері матрица арқылы табамыз:

$$\vec{\alpha} = C^{-1} \cdot \vec{V} \quad (3.7)$$

Майысу функциясын (3.4) вектор түрінде анықтаймыз:

$$W(x, y) = \vec{\delta}^T \cdot \vec{\alpha},$$

$$\vec{\delta}^T = |1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3| \quad (3.8)$$

(3.8) теңдеуді (3.7) өрнегіне қолдана отырып, пішін функциясын ақырлы элемент түйіндерінің жылжу векторы арқылы табуға болады:

$$W(x, y) = \vec{\delta}^T \cdot C^{-1} \cdot \vec{V} = \vec{q}^T \cdot \vec{V},$$

$$\vec{q}^T = \vec{\delta}^T \cdot C^{-1}. \quad (3.9)$$

Мұнда $\vec{q}^T = |q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7 \quad q_8 \quad q_9 \quad q_{10} \quad q_{11} \quad q_{12}|$ транспонирленген координаттық функциялар векторы. Әрбір координаттық функция ақырлы элементтің иілуіндегі пішінін анықтайды.

Сөйтіп, элементтің түйіндерінің жылжулары белгілі болған жағдайда, (3.9) формула бойынша ақырлы элементтің кез келген нүктесінің тік жылжуын анықтауға болады.

Ақырлы элементтің деформациялары, майысу функциясы $W(x, y)$ арқылы анықталады:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} = W_{xx};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} = W_{yy};$$

$$\gamma_{12} = 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} = 2W_{xy}. \quad (3.10)$$

мұндағы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ -сызықтық деформация, γ_{12} — бұрыштық деформация.

(3.10) теңдеулерді (3.9) бойынша векторлық түрде жазуға болады:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{q}_{,xx}^T \\ \vec{q}_{,yy}^T \\ 2\vec{q}_{,xy}^T \end{bmatrix} \cdot \vec{V} = B \cdot \vec{V} \quad (3.11)$$

мұнда B - деформация матрицасы, өлшемі (3×12) -ге тең болады.

Ақырлы элементтің ішкі күштері мына формулалармен анықталады:

$$M_x = -D(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y),$$

$$M_y = -D(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad (3.12)$$

$$M_{xy} = -\frac{D(1-\nu)}{2} \gamma_{xy},$$

мұнда D – цилиндрлік қатаңдығы, h – ақырлы элементтің қалыңдығы, ν – Пуассон коэффициенті, E – серпімділік модулі.

Серпімділік матрицасын енгізу арқылы және (3.11) формуласын қолдана отырып ішкі күштер векторын табамыз:

$$A = D \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{vmatrix} \quad (3.13)$$

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{vmatrix} = -A \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} = -A \cdot B \cdot \vec{V} \quad (3.14)$$

мұнда M_x, M_y – ақырлы элементтің x және y өстері бойындағы иілу моменттері, M_{xy} – элементтің бұралу моменті.

Сонымен, майысу функциясы (3.9) белгілі болса, деформацияны (3.11) өрнегі және ішкі күштерді (3.14) арқылы табуға болады.

Қатаңдық матрицасы және жүк векторы

Ақырлы элементтің түйіндерінде пайда болатын күштердің векторы мына формула бойынша анықталады:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \\ \vec{F}_3 \\ \vec{F}_4 \end{bmatrix}, \quad \vec{F}_i = \begin{bmatrix} Q_i \\ R_i \\ T_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.15)$$

мұндағы $\vec{F}_i$ – i түйінінің күштерінің векторы, Q_i – W_i жылжуы бойымен бағытталған күш; R_i – φ_i бұрыштық жылжуы бойымен бағытталған момент; T_i – ψ_i бұрыштық жылжу бойындағы момент.

Ақырлы элементтің түйіндік күштерінің жұмысы былайша анықталады:

$$A_1 = \frac{1}{2} \vec{V}^T \cdot \vec{F} \quad (3.16)$$

мұнда $\vec{V}^T$ -элементтің транспонирленген жылжу векторы.
Ішкі күштерден пайда болған жұмысты табамыз:

$$U = -\frac{1}{2} \int_S \vec{\varepsilon}^T \cdot \vec{M} dS \quad (3.17)$$

мұнда $\vec{\varepsilon}^T$ –транспонирленген деформация векторы, $\vec{M}$ – ақырлы элементтің ішкі күштерінің векторы, S – ақырлы элементтің ауданы.

(3.17) формулаға (3.11) және (3.14) теңдіктерін қойып, мына түрге келтіреміз:

$$U = \frac{1}{2} \vec{V}^T \left(\int_S B^T \cdot A \cdot B dS \right) \vec{V} \quad (3.18)$$

Егер жұмыстар (3.16) және (3.18) бір-біріне тең болған жағдайда, ақырлы элемент тепе-теңдікте болады:

$$\begin{aligned} A_1 &= U \quad \text{немесе} \quad \vec{F} = K \cdot \vec{V}, \\ K &= \int_S B^T \cdot A \cdot B \cdot dS. \end{aligned} \quad (3.19)$$

мұнда K – ақырлы элементтің қатандық матрицасы.

Ақырлы элементке сыртқы таралған күштер $P(x, y)$ әсер етсе, күштер жұмысы былайша табылады:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \int_S W^T \cdot P dS = \frac{\vec{V}^T}{2} \int_S \vec{q} \cdot P dS = \frac{\vec{V}^T}{2} \vec{E}_1, \\ \vec{E}_1 &= \int_S \vec{q} \cdot P(x, y) dS. \end{aligned} \quad (3.20)$$

мұнда $\vec{E}_1$ -жүк векторы, $P(x, y)$ -сыртқы күштер қарқындылығы.

Төртбұрышты ақырлы элементтің майысу функциясының нақты түрін алатын әдісті қарастырайық. Қарастырылатын элементтің майысу функциясын мына түрде іздейміз:

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \sum_{i,j=1}^4 \alpha_{ij} F_{ij}(x, y) = \sum_{i,j}^4 \alpha_{ij} f_i(x) \cdot \varphi_j(y), \\ x &= x/a; \quad y = y/b. \end{aligned} \quad (3.21)$$

мұнда x, y – өлшемсіз координаталар, $\alpha_{i,j}$ – тұрақты белгісіздер, $f_i(x), \varphi_j(y)$ – x, y өстерінің бойындағы арқалықтардың иілуіндегі координаттық функциялар.

Арқалықтардың иілуіндегі координаттық функциялар [48, 52] арқылы табылады:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1; & f_2(x) &= x^3 - 2x^2 + x, \\ f_3(x) &= 3x^2 - 2x^3; & f_4(x) &= x^3 - x^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Функциялар $\varphi_j(y)$ (3.22) өрнектен $x \rightarrow y; f \rightarrow \varphi; i \rightarrow j$; алмастыру арқылы анықталады.

Ақырлы элементтің түйіндеріндегі шекаралық шарттарды қарастырайық:

$$\begin{aligned} 1) & W(0,0) = W_1; \quad \varphi(0,0) = \varphi_1; \quad \psi(0,0) = \psi_1, \\ 2) & W(1,0) = W_2; \quad \varphi(1,0) = \varphi_2; \quad \psi(1,0) = \psi_2, \\ 3) & W(1,1) = W_3; \quad \varphi(1,1) = \varphi_3; \quad \psi(1,1) = \psi_3, \\ 4) & W(0,1) = W_4; \quad \varphi(0,1) = \varphi_4; \quad \psi(0,1) = \psi_4. \end{aligned} \quad (3.23)$$

(3.21) теңдеуін қолдана отырып, тұрақты белгісіздерді табамыз:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= W_1; \quad \alpha_{21} = \varphi_1 \cdot a; \quad \alpha_{12} = \psi_1 \cdot b, \\ \alpha_{31} &= W_2; \quad \alpha_{41} = \varphi_2 \cdot a; \quad \alpha_{32} = \psi_2 \cdot b, \\ \alpha_{33} &= W_3; \quad \alpha_{43} = \varphi_3 \cdot a; \quad \alpha_{34} = \psi_3 \cdot b, \\ \alpha_{13} &= W_4; \quad \alpha_{23} = \varphi_4 \cdot a; \quad \alpha_{14} = \psi_4 \cdot b. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ақырлы элементтің дифференциалдық тепе-теңдік теңдеуі $\nabla^2 \nabla^2 W = 0$ (3.21) формуласын ескергенде мына түрде жазылады:

$$\Phi(x, y) = 2 \sum_{i,j=1}^4 \alpha_{ij} f_i''(x) \varphi_j(y) = 0 \quad (3.25)$$

мұндағы f_i'' және $\varphi_j'' - f_i'(x)$ және $\varphi_j(y)$ - функциялардың екінші ретті туындылары.

(3.25) теңдеуді ақырлы элементтің әрбір түйініне қолданайық:

$$\Phi(0,0) = 0, \quad \Phi(1,0) = 0, \quad \Phi(1,1) = 0, \quad \Phi(0,1) = 0. \quad (3.26)$$

(3.26) пайдалану арқылы мынандай теңдеулер аламыз:

$$\begin{aligned} 4\alpha_{22} + 2\alpha_{24} + 2\alpha_{42} + \alpha_{44} &= b_1, \\ -2\alpha_{22} + \alpha_{24} - 4\alpha_{42} - 2\alpha_{44} &= b_2, \\ -2\alpha_{22} - 4\alpha_{24} - \alpha_{42} - 2\alpha_{44} &= b_3, \\ \alpha_{22} + 2\alpha_{24} + 2\alpha_{42} + 4\alpha_{44} &= b_4. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Мұндағы бос мүшелер былайша анықталады:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 9 & 6 & 6 & -9 & 3 & -6 & 9 & -3 & -3 & -9 & -6 & 3 \\ -9 & -3 & -6 & 9 & -6 & 6 & -9 & 6 & 3 & 9 & 3 & -3 \\ -9 & -6 & -3 & 9 & -3 & 3 & -9 & 3 & 6 & 9 & 6 & -6 \\ 9 & 3 & 3 & -9 & 6 & -3 & 9 & -6 & -6 & -9 & -3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \vec{V}_1 \quad (3.28)$$

(3.27) теңдеулер жүйесін шешіп қалған тұрақты белгісіздерді табамыз:

$$\begin{aligned} \alpha_{22} &= -\alpha_{11} - \alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{21} + \alpha_{23} + \alpha_{31} + \alpha_{32} - \alpha_{33}, \\ \alpha_{24} &= -\alpha_{11} + \alpha_{13} - \alpha_{14} - \alpha_{21} + \alpha_{23} + \alpha_{31} - \alpha_{33} + \alpha_{34}, \\ \alpha_{42} &= -\alpha_{11} - \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{31} + \alpha_{32} - \alpha_{33} - \alpha_{41} + \alpha_{43}, \\ \alpha_{44} &= -\alpha_{11} + \alpha_{13} - \alpha_{14} + \alpha_{31} - \alpha_{33} + \alpha_{34} - \alpha_{41} + \alpha_{43}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Табылған белгісіздерді (3.24) және (3.29) майысу функциясына (3.21) қойып, оны векторлық түрде анықтаймыз:

$$W(x, y) = \vec{q}^T \cdot \vec{V} \quad (3.30)$$

мұнда $\vec{q}^T$ -пластинаның координаттық функцияларының транспонирленген векторы, $\vec{V}$ -түйін жылжуларының векторы.

Пластинаның координаттық функцияларының нақты түрлері былайша табылады:

$$\begin{aligned} q_1(x, y) &= (1-y)f_1(x) + (1-x)\varphi_1(y) - (1-x)(1-y); \\ q_2(x, y) &= a(1-y)f_2(x); \\ q_3(x, y) &= b(1-x)\varphi_2(y); \\ q_4(x, y) &= (1-y)f_3(x) - x\varphi_3(y) + xy; \\ q_5(x, y) &= a(1-y)f_4(x); \\ q_6(x, y) &= bx\varphi_2(y); \\ q_7(x, y) &= yf_3(x) + x; \\ q_8(x, y) &= ayf_4(x); \\ q_9(x, y) &= bx\varphi_4(y); \\ q_{10}(x, y) &= (1-x)\varphi_3(y) - yf_3(y) + xy; \\ q_{11}(x, y) &= ayf_2(x); \\ q_{12}(x, y) &= b(1-x)\varphi_4(y). \end{aligned} \quad (3.31)$$

(3.21) формуладағы функциялар, арқалықтың иілуі мен біліктің бұралуындағы координаттық функциялар арқылы өрнектелген.

Жылжу функциясын және оның туындыларын былайша табамыз:

$$\begin{aligned}
 W(x_1, x_2) &= \vec{q}^T(x, y) \cdot \vec{V}, \\
 \frac{\partial W}{\partial x_1} &= \frac{1}{a_1} \frac{\partial \vec{q}^T}{\partial x} \cdot \vec{V} = \vec{\gamma}^T(x, y) \cdot \vec{V}, \quad x \rightarrow x_1; \quad y \rightarrow x_2, \\
 \frac{\partial W}{\partial x_2} &= \frac{1}{a_2} \frac{\partial \vec{q}^T}{\partial y} \cdot \vec{V} = \vec{\delta}^T(x, y) \cdot \vec{V}, \quad a \rightarrow a_1; \quad b \rightarrow a_2, \\
 \vec{q}^T &= [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10} \ q_{11} \ q_{12}], \\
 \vec{V}^T &= [W_1 \ \varphi_1 \ \psi_1 \ W_2 \ \varphi_2 \ \psi_2 \ W_3 \ \varphi_3 \ \psi_3 \ W_4 \ \varphi_4 \ \psi_4].
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Ақырлы элементте пайда болатын ішкі күштерді векторлық түрде анықтайық:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right) = -D \cdot \vec{\alpha}^T(x, y) \cdot \vec{V}, \\
 M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \right) = -D \cdot \vec{\beta}^T(x, y) \cdot \vec{V}, \\
 M_{12} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} = -D(1-\nu) \vec{\chi}^T(x, y) \cdot \vec{V}, \\
 Q_1 &= -D \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 W = -D \vec{\xi}_1^T(x, y) \cdot \vec{V}, \\
 Q_2 &= -D \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 W = -D \vec{\xi}_2^T(x, y) \cdot \vec{V},
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

мұнда M_1, M_2 - x_1 және x_2 өстерінің бойымен бағытталған иілу моменттері, M_{12} - бұралу моменті, Q_1, Q_2 - x_1 және x_2 өстері бойынша көлденең күштер, $\nabla^2 W$ - Лаплас операторы, ν - Пуассон коэффициенті, D, E - ақырлы элементтің цилиндрлік қатаңдығы және серпімділік модулі.

Ішкі күштердің ақырлы элементте таралу функциялары былайша табылады:

$$\begin{aligned}
 \vec{\alpha}(x, y) &= \frac{\partial^2 \vec{q}}{\partial x^2} \frac{1}{a_1^2} + \frac{\nu}{a_2^2} \frac{\partial^2 \vec{q}}{\partial y^2}, \\
 \vec{\beta}(x, y) &= \frac{\partial^2 \vec{q}}{\partial y^2} \frac{1}{a_2^2} + \frac{\nu}{a_1^2} \frac{\partial^2 \vec{q}}{\partial x^2}, \\
 \vec{\chi}(x, y) &= \frac{1}{a_1 a_2} \frac{\partial^2 \vec{q}}{\partial x \partial y}, \\
 \vec{\xi}_1(x, y) &= \frac{\partial^3 \vec{q}}{\partial x^3} \frac{1}{a_1^3} + \frac{1}{a_1 a_2^2} \frac{\partial^3 \vec{q}}{\partial x \partial y^2},
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\bar{\xi}_2(x, y) = \frac{1}{a_1^2 a_2} \frac{\partial^3 \bar{q}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{1}{a_2^3} \frac{\partial^3 \bar{q}}{\partial y^3}.$$

(3.32)–ші майысу функциясы мен (3.33)–ші ішкі күштердің мәндерін қолдана отырып, ақырлы элементтің жақтарындағы ішкі күштердің жұмыстарын анықтауға болады:

а) $x_1 = 0$ жақтары

$$A_1 = \vec{V}^T \cdot K_1 \cdot \vec{V};$$

$$K_1 = -D \cdot a_2 \int_0^1 \left[-\bar{q}(0, y) \cdot \bar{\xi}_1^T(0, y) + (1 - \nu) \bar{\phi}(0, y) \cdot \bar{\chi}^T(0, y) + \bar{\psi}(0, y) \cdot \bar{\phi}^T(0, y) \right] dy,$$

б) $x_1 = a_1$ жақтары

$$A_2 = \vec{V}^T \cdot K_2 \cdot \vec{V};$$

$$K_2 = -D \cdot a_2 \int_0^1 \left[-\bar{q}(1, y) \cdot \bar{\xi}_1^T(1, y) + (1 - \nu) \bar{\phi}(1, y) \cdot \bar{\chi}^T(1, y) + \bar{\psi}(1, y) \cdot \bar{\phi}^T(1, y) \right] dy,$$

в) $x_2 = 0$ жақтары (3.35)

$$A_3 = \vec{V}^T \cdot K_3 \cdot \vec{V};$$

$$K_3 = -D \cdot a_1 \int_0^1 \left[-\bar{q}(x, 0) \cdot \bar{\xi}_2^T(x, 0) + (1 - \nu) \bar{\phi}(x, 0) \cdot \bar{\chi}^T(x, 0) + \bar{\psi}(x, 0) \cdot \bar{\psi}^T(x, 0) \right] dx,$$

г) $x_2 = a_2$ жақтары

$$A_4 = \vec{V}^T \cdot K_4 \cdot \vec{V};$$

$$K_4 = -D \cdot a_1 \int_0^1 \left[-\bar{q}(x, 1) \cdot \bar{\xi}_2^T(x, 1) + (1 - \nu) \bar{\phi}(x, 1) \cdot \bar{\chi}^T(x, 1) + \bar{\psi}(x, 1) \cdot \bar{\psi}^T(x, 1) \right] dx.$$

Ақырлы элементтің жақтарындағы ішкі күштердің жалпы жұмысы былайша анықталады:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \vec{V}^T \cdot K \cdot \vec{V}, \\ K &= K_1 + K_2 + K_3 + K_4. \end{aligned} \quad (3.36)$$

мұнда K —ақырлы элементтің қатаңдық матрицасы (12×12), яғни ол 12 жол және 12 бағанадан тұрады. Оның элементтерінің мәндері координаттық функциялардан (3.31) және олардың туындыларынан тәуелді болады.

Ақырлы элементтің түйіндері бекіністерден босаған жағдайда, оның реакцияларының жұмысын былайша анықтауға болады:

$$T = \vec{V}^T \cdot \vec{F}, \quad (3.37)$$

$$\vec{F}^T = \begin{bmatrix} P_1 & R_1 & S_1 & P_2 & R_2 & S_2 & P_3 & R_3 & S_3 & P_4 & R_4 & S_4 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

мұндағы мысалы P_1-W_1 -тік жылжуы бойымен бағытталған реакция, S_3 - үшінші түйіннің ψ_3 бұрыштық жылжуы бойымен бағытталған реакция, R_4 - төртінші түйіннің φ_4 бұрыштық жылжуы бойымен бағытталған реакция.

Ақырлы элемент тепе-теңдікте болуы себебінен жұмыстар тең екендігі белгілі $T = A$. Осы жұмыстардың өрнектерін (3.36) және (3.37) қолдана отырып, ақырлы элементтің негізгі тәуелділігін анықтауға болады:

$$\vec{F} = K \cdot \vec{V} \quad (3.38)$$

(3.31) координаттық функцияларды қолдана отырып, (3.35) формула бойынша қатаңдық матрицасының элементтерін анықтаймыз $a_1 \rightarrow a$, $b_1 \rightarrow b$:

$$\begin{aligned} K_{11} = K_{44} = K_{77} = K_{10,10} &= \frac{Da_2}{a_1^3} \left(4 + \frac{14-4\nu}{5} \mu^2 + 4\mu^4 \right), \\ K_{22} = K_{55} = K_{88} = K_{11,11} &= D \left(\frac{4}{3\mu} + \frac{4(1-\nu)}{15} \mu \right), \\ K_{33} = K_{66} = K_{99} = K_{12,12} &= D \left(\frac{4\mu}{3} + \frac{4(1-\nu)}{15\mu} \right), \\ K_{12} = -K_{45} = -K_{78} = K_{10,11} &= \frac{Da_2}{a_1^2} \left(2 + \frac{1+4\nu}{5} \mu^2 \right), \\ K_{13} = K_{46} = -K_{79} = -K_{10,12} &= \frac{Da_1}{a_2^2} \left(2 + \frac{1+4\nu}{5\mu^2} \right), \\ K_{23} = -K_{56} = K_{89} = -K_{11,12} &= \nu D, \\ K_{14} = K_{7,10} &= \frac{Da_2}{a_1^3} \left(-4 - \frac{14-4\nu}{5} \mu^2 + 2\mu^4 \right), \\ K_{1,10} = K_{47} &= \frac{Da_2}{a_1^3} \left(2 + \frac{4\nu-14}{5} \mu^2 - 4\mu^4 \right), \\ K_{15} = -K_{24} = -K_{7,11} = K_{8,10} &= \frac{Da_2}{a_1^2} \left(-2 - \frac{1-\nu}{5} \mu^2 \right), \\ K_{25} = K_{8,11} &= D \left(\frac{2}{3\mu} - \frac{1-\nu}{15} \mu \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{16} &= K_{34} = -K_{7,12} = -K_{9,10} = \frac{Da_1}{a_2^2} \left(1 - \frac{1+4\nu}{5\mu^2} \right), \\
K_{36} &= K_{9,2} = D \left(\frac{2\mu}{3} - \frac{4(1-\nu)}{15\mu} \right), \\
K_{1,11} &= K_{2,10} = -K_{48} = -K_{57} = \frac{Da_2}{a_1^2} \left(1 - \frac{1+4\nu}{5} \mu^2 \right), \\
K_{1,12} &= -K_{3,10} = K_{49} = -K_{67} = \frac{Da_1}{a_2^2} \left(2 + \frac{1-\nu}{5\mu^2} \right), \\
K_{17} &= K_{4,10} = \frac{Da_2}{a_1^3} \left(-2 + \frac{14-4\nu}{5} \mu^2 - 2\mu^4 \right), \\
K_{18} &= -K_{27} = K_{4,11} = -K_{5,10} = \frac{Da_2}{a_1^2} \left(1 - \frac{1-\nu}{5} \mu^2 \right), \\
K_{19} &= -K_{37} = K_{4,12} = -K_{6,10} = \frac{Da_1}{a_2^2} \left(1 - \frac{1-\nu}{5\mu^2} \right), \\
K_{2,11} &= K_{58} = D \left(\frac{2}{3\mu} - \frac{4(1-\nu)}{15} \mu \right), \\
K_{28} &= K_{5,11} = D \left(\frac{1}{3\mu} + \frac{1-\nu}{15} \mu \right), \\
K_{39} &= K_{6,12} = D \left(\frac{\mu}{3} + \frac{1-\nu}{15\mu} \right), \\
K_{3,12} &= K_{69} = D \left(\frac{2\mu}{3} - \frac{1-\nu}{15\mu} \right), \\
K_{26} &= K_{29} = K_{2,12} = K_{35} = K_{38} = K_{3,11} = K_{59} = K_{5,12} = K_{68} = K_{6,11} = K_{8,12} = K_{9,11} = 0, \\
\mu &= \frac{a}{b}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

(3.20) формула арқылы $P(x_1, x_2) = P_0$ және координаттық функциялардың мәндерін (3.31) ескеріп, сыртқы жүктер векторын анықтаймыз:

$$\vec{E}_1^T = P_0 a_1 a_2 \left[\frac{1}{4}; -\frac{a_2}{12}; \frac{a_1}{12}; \frac{1}{4}; \frac{a_2}{12}; \frac{a_1}{12}; \frac{1}{4}; -\frac{a_2}{12}; -\frac{a_1}{12}; \frac{1}{4}; \frac{a_2}{12}; -\frac{a_1}{12}; \right] \tag{3.40}$$

Сонымен, ақырлы элементтің жақтарының ішкі күштерінің жұмыстарын қолдана отырып, ақырлы элементтің қатандық матрицасын табуға болады. (3.38) негізгі тәуелділігін қолдана отырып, кез келген төртбұрышты пластинаның иілу есептерін кез келген сыртқы жүктер түскенде және қырларындағы шарттар қойылғанда анықтауға болады.

3.2 Көлденең ығысуды ескергендегі пластинаның ақырлы элементінің пішін функциясы, қатандық матрицасы мен жүк векторы

Классикалық теория бойынша төртбұрышты пластинаны есептегенде көлденең ығысу деформациясы ескерілмейді. Көлденең ығысу деформациясын ескеру дәлденген теориялардың негізіне жатады және ол жаңа функция арқылы сипатталады.

Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаның жетілдірілген ақырлы элементінің негізгі тәуелділігі мен қатандық матрицасын анықтау үшін [44, 45] жұмыстарында алынған нәтижелерді қолданамыз. Пластинаның классикалық теориясында қолданылатын жалпыланған көлденең күштер төмендегі түрде анықталған:

$$Q_1 = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W + \frac{\partial M_{12}}{\partial y}; \quad Q_1^0 = \int_0^1 Q_1 dy, \quad (3.41)$$

$$Q_2 = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 W + \frac{\partial M_{12}}{\partial x}; \quad Q_2^0 = \int_0^1 Q_2 dx,$$

Майысу функциясының мәнін (3.30) қолданып, көлденең күштердің формулаларын (3.41) ақырлы элементтің түйіндеріндегі жылжулары арқылы өрнектеп аламыз ($\varphi_i \rightarrow \alpha_i, \psi_i \rightarrow \beta_i, a \rightarrow a_1, b \rightarrow a_2, i = 1, 2, 3, 4$):

$$Q_1^0 = -D \cdot \left\{ \frac{6}{a_1^3} W_1 + \frac{3}{a_1^2} \alpha_1 + \frac{1}{a_1 a_2} \beta_1 - \frac{6}{a_1^3} W_2 + \frac{3}{a_1^2} \alpha_2 - \frac{1}{a_1 a_2} \beta_2 - \right. \\ \left. - \frac{6}{a_1^3} W_3 + \frac{3}{a_1^2} \alpha_3 + \frac{1}{a_1 a_2} \beta_3 + \frac{6}{a_1^3} W_4 + \frac{3}{a_1^2} \alpha_4 - \frac{1}{a_1 a_2} \beta_4 \right\} + \\ + \frac{D(1-\nu)}{a_1 a_2} (\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4) \quad (3.42)$$

$$Q_2^0 = -D \cdot \left\{ \frac{6}{a_2^3} W_1 + \frac{1}{a_1 a_2} \alpha_1 + \frac{3}{a_2^2} \beta_1 + \frac{6}{a_2^3} W_2 - \frac{1}{a_1 a_2} \alpha_2 + \frac{3}{a_2^2} \beta_2 - \right. \\ \left. - \frac{6}{a_2^3} W_3 + \frac{1}{a_1 a_2} \alpha_3 + \frac{3}{a_2^2} \beta_3 - \frac{6}{a_2^3} W_4 - \frac{1}{a_1 a_2} \alpha_4 + \frac{3}{a_2^2} \beta_4 \right\} + \\ + \frac{D(1-\nu)}{a_1 a_2} (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) \quad (3.43)$$

(3.42) және (3.43) көлденең күштері классикалық емес теория бойынша әдебиеттерде былайша анықталады:

$$Q_1^0 = -\frac{1}{\mu_0} GF \cdot \psi; \quad Q_2^0 = -\frac{1}{\mu_0} GF \cdot \chi \quad (3.44)$$

мұндағы ψ, χ -көлденең ығысудан пайда болатын бұрыштар, μ_0 -көлденең ығысу деформациясының өзгеру заңдылығына тәуелді параметр (тұрақты болғанда $\mu_0 = 1$, парабола бойынша өзгергенде $\mu_0 = 1,2$), GF - ақырлы элементтің көлденең ығысу қатандығы.

Көлденең ығысу бұрыштарын табу үшін жаңа белгісіздерді енгіземіз:

$$\alpha_i^0 = \alpha_i + \psi; \quad \beta_i^0 = \beta_i + \chi; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.45)$$

(3.45) өрнектегі белгісіздерді ескеріп, (3.42) және (3.43) көлденең күштерін келесі түрде жазамыз:

$$Q_1^0 = -D \left\{ \frac{6}{a_1^3} W_1 + \frac{3}{a_1^2} \alpha_1^0 + \frac{\nu}{a_1 a_2} \beta_1^0 - \frac{6}{a_1^3} W_2 + \frac{3}{a_1^2} \alpha_2^0 - \frac{\nu}{a_1 a_2} \beta_2^0 - \right. \\ \left. - \frac{6}{a_1^3} W_3 + \frac{3}{a_1^2} \alpha_3^0 + \frac{\nu}{a_1 a_2} \beta_3^0 + \frac{6}{a_1^3} W_4 + \frac{3}{a_1^2} \alpha_4^0 - \frac{\nu}{a_1 a_2} \beta_4^0 - \frac{12}{a_1^2} \psi \right\}, \quad (3.46)$$

$$Q_2^0 = -D \left\{ \frac{6}{a_2^3} W_1 + \frac{\nu}{a_1 a_2} \alpha_1^0 + \frac{3}{a_2^2} \beta_1^0 + \frac{6}{a_2^3} W_2 - \frac{\nu}{a_1 a_2} \alpha_2^0 + \frac{3}{a_2^2} \beta_2^0 - \right. \\ \left. - \frac{6}{a_2^3} W_3 + \frac{\nu}{a_1 a_2} \alpha_3^0 + \frac{3}{a_2^2} \beta_3^0 - \frac{6}{a_2^3} W_4 - \frac{\nu}{a_1 a_2} \alpha_4^0 + \frac{3}{a_2^2} \beta_4^0 - \frac{12}{a_2^2} \chi \right\}.$$

(3.46) теңдеулердің сол жақтарына көлденең ығысу бұрыштарын (3.44) енгізіп, төмендегі белгісіздерді табамыз:

$$m = \frac{6}{a_1} W_1 + 3\alpha_1^0 + \frac{\nu}{m_0} \beta_1^0 - \frac{6}{a_1} W_2 + 3\alpha_2^0 - \frac{\nu}{m_0} \beta_2^0 - \frac{6}{a_1} W_3 + 3\alpha_3^0 + \\ + \frac{\nu}{m_0} \beta_3^0 + \frac{6}{a_1} W_4 + 3\alpha_4^0 - \frac{\nu}{m_0} \beta_4^0, \quad (3.47)$$

$$n = \frac{6}{m_0 a_1} W_1 + \nu m_0 \alpha_1^0 + 3\beta_1^0 + \frac{6}{m_0 a_1} W_2 - \nu m_0 \alpha_2^0 + 3\beta_2^0 - \frac{6}{m_0 a_1} W_3 + \\ + \nu m_0 \alpha_3^0 + 3\beta_3^0 - \frac{6}{m_0 a_1} W_4 - \nu m_0 \alpha_4^0 + 3\beta_4^0,$$

$$m_0 = \frac{a_2}{a_1}$$

Ықшамдау арқылы оларды келесі түрде жазуға болады:

$$\frac{1}{\mu_0} GF \cdot \psi + \frac{12\psi}{a_1^2} D = \frac{D}{a_1^2} \cdot m,$$

(3.48)

$$\frac{1}{\mu_0} GF \cdot \chi + \frac{12\chi}{a_2^2} D = \frac{D}{a_1^2} \cdot n.$$

Келесі параметрлерді енгізіп, (3.48)-ші формуладан көлденең ығысу бұрыштарын табамыз:

$$g_1 = \frac{\mu_0 \cdot D}{GF \cdot a_1^2 \left(1 + 12 \frac{\mu_0 \cdot D}{GF \cdot a_1^2} \right)}, \quad (3.49)$$

$$g_2 = \frac{\mu_0 \cdot D}{GF \cdot a_2^2 \left(1 + 12 \frac{\mu_0 \cdot D}{GF \cdot a_2^2} \right)}, \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \psi &= g_1 \cdot m, \\ \chi &= g_2 \cdot n. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Ақырлы элементтің майысу функциясын табу үшін (3.30) формуланы жаңа белгісіздер (3.45) бойынша анықтауға болады:

$$\begin{aligned} W(x, y) &= q_1 W_1 + q_2 \alpha_1^0 + q_3 \beta_1^0 + q_4 W_2 + q_5 \alpha_2^0 + q_6 \beta_2^0 + q_7 W_3 + q_8 \alpha_3^0 + \\ &+ q_9 \beta_3^0 + q_{10} W_4 + q_{11} \alpha_4^0 + q_{12} \beta_4^0 - \psi \cdot f(x, y) - \chi \cdot \varphi(x, y), \\ f(x, y) &= q_2 + q_5 + q_8 + q_{11}, \\ \varphi(x, y) &= q_3 + q_6 + q_9 + q_{12}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

мұнда $q_1 - q_{12}$ көлденең ығысуды ескермегендегі координаттық функциялар, $W_1 - \beta_4^0$ көлденең ығысу деформациясын ескергендігі түйіндік жылжулар.

Көлденең ығысу бұрыштарын (3.50) ескеріп, (3.51) формуладан ақырлы элементтің майысу функциясын аламыз:

$$\begin{aligned} W(x, y) &= q_1^0(x, y) W_1 + q_2^0(x, y) \alpha_1^0 + q_3^0(x, y) \beta_1^0 + \\ &+ q_4^0(x, y) W_2 + q_5^0(x, y) \alpha_2^0 + q_6^0(x, y) \beta_2^0 + \\ &+ q_7^0(x, y) W_3 + q_8^0(x, y) \alpha_3^0 + q_9^0(x, y) \beta_3^0 + \\ &+ q_{10}^0(x, y) W_4 + q_{11}^0(x, y) \alpha_4^0 + q_{12}^0(x, y) \beta_4^0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

мұнда $q_1^0(x, y) - q_{12}^0(x, y)$ ақырлы элементтің көлденең ығысу деформациясын ескергендегі координаттық функциялар.

Көлденең ығысуын ескергендегі координаттық функциялар былайша болады:

$$\begin{aligned}
q_1^0(x, y) &= q_1 + \frac{6}{a_1} \left(g_1 \cdot f + \frac{g_2 \cdot \varphi}{m_0} \right), \\
q_2^0(x, y) &= q_2 + (3g_1 - \nu m_0 g_2 \cdot \varphi), \\
q_3^0(x, y) &= q_3 + \left(\frac{\nu g_1 \cdot f}{m_0} + 3g_2 \cdot \varphi \right), \\
q_4^0(x, y) &= q_4 + \frac{6}{a_1} \left(-g_1 \cdot f - \frac{g_2 \cdot \varphi}{m_0} \right), \\
q_5^0(x, y) &= q_5 + (3g_1 - \nu m_0 g_2 \cdot \varphi), \\
q_6^0(x, y) &= q_6 + \left(-\frac{\nu g_1 \cdot f}{m_0} + 3g_2 \cdot \varphi \right), \\
q_7^0(x, y) &= q_7 - \frac{6}{a_1} \left(g_1 \cdot f + \frac{g_2 \cdot \varphi}{m_0} \right), \\
q_8^0(x, y) &= q_8 + (3g_1 \cdot f + \nu m_0 g_2 \cdot \varphi), \\
q_9^0(x, y) &= q_9 + \left(\frac{\nu g_1 \cdot f}{g_1 \cdot f} + 3g_2 \cdot \varphi \right), \\
q_{10}^0(x, y) &= q_{10} + \frac{6}{a_1} \left(g_1 \cdot f - \frac{g_2 \cdot \varphi}{m_0} \right), \\
q_{11}^0(x, y) &= q_{11} + (3g_1 - \nu m_0 g_2 \cdot \varphi), \\
q_{12}^0(x, y) &= q_{12} + \left(-\frac{\nu g_1 \cdot f}{m_0} + 3g_2 \cdot \varphi \right).
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Осы өрнектен $GF \rightarrow \infty$ ($g_1 \rightarrow 0, g_2 \rightarrow 0$) жағдайда (3.31) өрнегіндегі нәтиже алынады.

Қорыта келе, көлденең ығысу деформациясы негізгі параметрлер (3.49) арқылы ескеріледі. Әдебиеттерде көлденең ығысу деформациясын ескергенде ақырлы элементтің белгісіздер саны 16-ға тең болса, ұсынылып отырған әдісте олар 12-ге тең болады. Анықталған майысу функциясы белгілі координаттық функциялар $q_1(x, y) - q_{12}(x, y)$ бойынша табылады.

Көлденең ығысуды ескергендегі қатаңдық матрицасы және жүк векторы

Классикалық теория бойынша төртбұрышты пластинадан бөлініп алынған ақырлы элементтің қатаңдық матрицасын қолданып, пластинаның көлденең ығысуды ескергендегі қатаңдық матрицасын анықтауға болады. Ол үшін төртбұрышты ақырлы элементтің негізгі тәуелділігін (3.38) қолданамыз.

Тәуелділіктің i - ші жолын жазайық:

$$\begin{aligned}
F_i &= K_{i1} W_1 + K_{i2} \alpha_1 + K_{i3} \beta_1 + K_{i4} W_2 + K_{i5} \alpha_2 + K_{i6} \beta_2 + \\
&+ K_{i7} W_3 + K_{i8} \alpha_3 + K_{i9} \beta_3 + K_{i10} W_4 + K_{i11} \alpha_4 + K_{i12} \beta_4, \quad i = \overline{1, 12}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Ескі белгісіздерді жаңа белгісіздермен (3.45) алмастырып, (3.54)-ті төмендегі түрге келтіруге болады:

$$\begin{aligned}
 F_i &= K_{i1}W_1 + K_{i2}\alpha_1^0 + K_{i3}\beta_1^0 + K_{i4}W_2 + K_{i5}\alpha_2^0 + K_{i6}\beta_2^0 + \\
 &\quad + K_{i7}W_3 + K_{i8}\alpha_3^0 + K_{i9}\beta_3^0 + K_{i10}W_4 + K_{i11}\alpha_4^0 + K_{i12}\beta_4^0 - a_i\psi - b_i\chi, \quad (3.55) \\
 a_i &= K_{i2} + K_{i5} + K_{i8} + K_{i11}; \quad b_i = K_{i3} + K_{i6} + K_{i9} + K_{i12}, \\
 i &= \overline{1,12}.
 \end{aligned}$$

(50)-ші көлденең ығысу бұрыштарының мәндерін, (55)-ші өрнекке қойып, ұқсас мүшелерін жинақтап, осы өрнекті мына түрде жазамыз:

$$\begin{aligned}
 F_i &= K_{i1}^0W_1 + K_{i2}^0\alpha_1^0 + K_{i3}^0\beta_1^0 + K_{i4}^0W_2 + K_{i5}^0\alpha_2^0 + K_{i6}^0\beta_2^0 + \\
 &\quad + K_{i7}^0W_3 + K_{i8}^0\alpha_3^0 + K_{i9}^0\beta_3^0 + K_{i10}^0W_4 + K_{i11}^0\alpha_4^0 + K_{i12}^0\beta_4^0, \quad (3.56) \\
 i &= \overline{1,12}.
 \end{aligned}$$

Пластинаның ақырлы элементінің қатаңдық матрицасының элементтері көлденең ығысу ескергенде мына формулалармен анықталады:

$$\begin{aligned}
 K_{i1}^0 &= K_{i1} + \frac{6}{a} \left(A_i + \frac{B_i}{m} \right); \quad K_{i2}^0 = K_{i2} + (3A_i + \nu m B_i); \quad K_{i3}^0 = K_{i3} + \left(\frac{\nu}{m} A_i + 3B_i \right), \\
 K_{i4}^0 &= K_{i4} + \frac{6}{a} \left(-A_i + \frac{B_i}{m} \right); \quad K_{i5}^0 = K_{i5} + (3A_i - \nu m B_i); \quad K_{i6}^0 = K_{i6} + \left(-\frac{\nu}{m} A_i + 3B_i \right), \quad (3.57) \\
 K_{i7}^0 &= K_{i7} - \frac{6}{a} \left(A_i + \frac{B_i}{m} \right); \quad K_{i8}^0 = K_{i8} + (3A_i + \nu m B_i); \quad K_{i9}^0 = K_{i9} + \left(\frac{\nu}{m} A_i + 3B_i \right), \\
 K_{i10}^0 &= K_{i10} + \frac{6}{a} \left(A_i - \frac{B_i}{m} \right); \quad K_{i11}^0 = K_{i11} + (3A_i - \nu m B_i); \quad K_{i12}^0 = K_{i12} + \left(-\frac{\nu}{m} A_i + 3B_i \right), \\
 A_i &= -g_1 \cdot a_i, \quad B_i = -g_2 \cdot b_i, \quad i = \overline{1,12}
 \end{aligned}$$

(3.39)-шы қатаңдық матрицаның элементтерін (3.57)-ші формулаларға қойып, мынандай нәтижелерді анықтаймыз:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -g_1 \frac{D}{a} (6m); \quad B_1 = -g_2 \frac{D}{a} \left(\frac{6}{m^2} \right), \\
 A_2 &= -3g_1 D(m); \quad B_2 = -g_2 D(\nu), \quad (3.58) \\
 K_{12}^0 &= K_{12} + (3A_1 + \nu \cdot m B_1) = K_{12} + \frac{D}{a} \left(18g_1 \cdot m + \nu g_2 \frac{6}{m} \right), \\
 K_{21}^0 &= K_{21} + \frac{6}{a} \left(A_2 + \frac{B_2}{m} \right) = K_{21} + \frac{D}{a} \left(18g_1 \cdot m + \nu g_2 \frac{6}{m} \right).
 \end{aligned}$$

Жүк векторының мәндерін анықтау үшін (3.40) формуласын қолданып, жұмысты табамыз:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1^T \cdot \vec{V} = P_0 \cdot a_1 a_2 \left\{ \frac{1}{4} W_1 - \frac{a_2}{12} \alpha_1 + \frac{a_1}{12} \beta_1 + \frac{1}{4} W_2 + \frac{a_2}{12} \alpha_2 + \frac{a_1}{12} \beta_2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} W_3 - \frac{a_2}{12} \alpha_3 - \frac{a_1}{12} \beta_3 + \frac{1}{4} W_4 + \frac{a_2}{12} \alpha_4 - \frac{a_1}{12} \beta_4 \right\} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Ескі белгісіздерді жаңа белгісіздермен (3.45) ауыстырып, (3.59)-ды мына түрге келтіреміз:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1^T \cdot \vec{V} = P_0 \cdot a_1 a_2 \left\{ \frac{1}{4} W_1 - \frac{a_2}{12} \alpha_1^0 + \frac{a_1}{12} \beta_1^0 + \frac{1}{4} W_2 + \frac{a_2}{12} \alpha_2^0 + \frac{a_1}{12} \beta_2^0 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} W_3 - \frac{a_2}{12} \alpha_3^0 - \frac{a_1}{12} \beta_3^0 + \frac{1}{4} W_4 + \frac{a_2}{12} \alpha_4^0 - \frac{a_1}{12} \beta_4^0 - \right. \\ \left. - \psi \frac{a_2}{12} [-1+1-1+1] - \chi \frac{a_1}{12} [1-1+1-1] \right\} \end{aligned} \quad (3.60)$$

(3.60) өрнектен транспонирленген жылжу векторының көбейту құраушыларын анықтаймыз. Ол вектор (3.40) формуласына тең болады.

Сөйтіп, көлденең ығысу деформациясы (3.49) формулалары бойынша табылып, параметрлер арқылы ескеріледі. Бұл параметрлер тек қатаңдық матрицасына әсері болады, ал жүк векторына ешқандай әсерін тигізбейді. [\[46, 47\]](#)

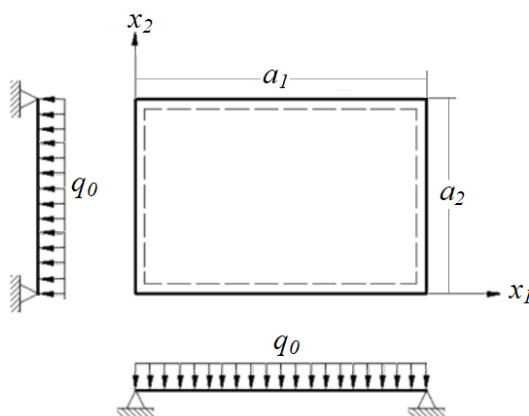
Қорытындылай келе, классикалық теорияда қарастырылмайтын көлденең ығысу деформациясы, ақырлы элементтің түйіндеріндегі жылжулар арқылы еркіндік дәрежесін көтермей ақ ескерілді. Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаның ақырлы элементі және қатаңдық матрицасы табылды. Шешуші тендеулер жүйесі толығымен автоматтандырылды.

4 КӨЛДЕНЕҢ ЫҒЫСУ ДЕФОРМАЦИЯСЫН ЕСКЕРГЕНДЕГІ ТІКБҰРЫШТЫ ПЛАСТИНАЛАРДЫҢ ИІЛУІН ЕСЕПТЕУ

Берілген тарауда бірінші тарауда ұсынылған жетілдірілген әдісін іске асыру мысалы ретінде жақтары әр түрлі бекінген не бос болатын тікбұрышты пластиналардың біртекті таралған жүктеме әсерінен майысуын, кернеулік-деформациялық күйін анықтау есептері беріледі.

4.1 Таралған жүктеме әсер еткенде барлық жақтары топсалы тірелген пластинаның иілуі

$(0 \leq x_1 \leq a_1, 0 \leq x_2 \leq a_2, -\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2})$ координаттық жүйеде изотропты тікбұрышты пластинаны қарастырайық. Пластинаның $x_1 = 0, x_1 = a_1, x_2 = 0, x_2 = a_2$ жақтары топсалы тірелген, ал жоғарғы бетіне бірқалыпты таралған жүктеме әсер етсін (сурет 4.1.1).



Сурет 4.1.1 – Тікбұрышты пластинаның геометриясы мен координаттық жүйесі.

2.3 бөлімде берілген алгоритмге сәйкес алдымен пластинаның классикалық теория бойынша шешімін (2.40) түрінде тауып аламыз.

Горизонтал және вертикал бағытта арқалықтардың өлшемсіз нормаланған иілім функцияларын (2.57), (2.67), (2.68) өрнектерінен сыртқы жүктеменің таралау заңы $p(x, y) = 1$ болған жағдайда анықталып мына түрде жазылады [48]:

$$W_0(x_1, x_2) = W_* f(x, y) = \alpha_0 \frac{q_0 a_1^2 a_2^2}{D} \left(\frac{16}{5} \right)^2 (x^4 - 2x^3 + x)(y^4 - 2y^3 + y) \quad (4.1)$$

мұндағы $x = x_1/a_1, y = x_2/a_2$.

$f(x, y)$ өлшемсіз функциясының туындаларын анықтаймыз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{16}{5} \right)^2 (4x^3 - 6x^2 + 1)(y^4 - 2y^3 + y);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 (12x^2 - 12x)(y^4 - 2y^3 + y);$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 (24x - 12)(y^4 - 2y^3 + y);$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = 24 \left(\frac{16}{5}\right)^2 (y^4 - 2y^3 + y);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 (x^4 - 2x^3 + x)(4y^3 - 6y^2 + 1);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 (x^4 - 2x^3 + x)(12y^2 - 12);$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 (x^4 - 2x^3 + x)(24y - 12);$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 24 \left(\frac{16}{5}\right)^2 (x^4 - 2x^3 + x);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 (4x^3 - 6x^2 + 1)(4y^3 - 6y^2 + 1);$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 (12x^2 - 12x)(4y^3 - 6y^2 + 1);$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 (4x^3 - 6x^2 + 1)(12y^2 - 12y);$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \left(\frac{16 \cdot 12}{5}\right)^2 (x^2 - x)(y^2 - y).$$

Ішкі күштердің таралу функциялары табамыз:

$$m_1(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \nu \cdot m^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 \left[(12x^2 - 12x)(y^4 + 2y^3 - y) + \nu \cdot m^2 (x^4 - 2x^3 + x)(12y^2 - 12y) \right];$$

$$m_2(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\nu}{m^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 \left[(x^4 - 12x^3 + x)(12y^2 - 12y) + \frac{\nu}{m^2} (12x^2 - 12x)(y^4 - 2y^3 + y) \right];$$

$$m_{12}(x, y) = (1 - \nu) \left(\frac{16}{5}\right)^2 (4x^3 - 6x^2 + 1)(4y^3 - 6y^2 + 1);$$

$$q_1(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + m^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 \left[(24x - 12)(y^4 - 2y^3 + y) + m^2 (4x^3 - 6x^2 + 1)(12y^2 - 12y) \right];$$

$$q_2(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 \left[(x^4 - 2x^3 + x)(24y - 12) + \frac{1}{m^2} (12x^2 - 12x)(4y^3 - 6y^2 + 1) \right];$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial y} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 \left[(24x - 12)(4y^3 - 6y^2 + 1) + m^2 (4x^3 - 6x^2 + 1)(24y - 12) \right];$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial x} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 \left[(4x^3 - 6x^2 + 1)(24y - 12) + \frac{1}{m^2} (24x - 12)(4y^3 - 6y^2 + 1) \right].$$

Барлық жағы топласалы тірелгенде пластинаның (2.47) шекаралық шарттары қанағаттандырылатыны тексеріледі:

- $x_1 = 0, a_1$ немесе $x = 0, 1$ жағында:

$$f(0, y) = \frac{256}{25}(0^4 - 2 \cdot 0^3 + 0)(y^4 - 2y^3 + y) \equiv 0;$$

$$f(1, y) = \frac{256}{25}(1^4 - 2 \cdot 1^3 + 1)(y^4 - 2y^3 + y) \equiv 0;$$

$$m_1(0, y) = \left(\frac{16}{5}\right)^2 \left[(12 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0)(y^4 + 2y^3 - y) + \nu \cdot m^2(0^4 - 2 \cdot 0^3 + 0)(12y^2 - 12y) \right] \equiv 0;$$

$$m_1(1, y) = \left(\frac{16}{5}\right)^2 \left[(12 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1)(y - 2y^3 + y^4) + \nu \cdot m^2(1^4 - 2 \cdot 1^3 + 1)(12y^2 - 12y) \right] \equiv 0;$$

$$\frac{\partial f(0, y)}{\partial y} = \frac{256}{25}(0^4 - 2 \cdot 0^3 + 0)(4y^3 - 6y^2 + 1) \equiv 0;$$

$$\frac{\partial f(1, y)}{\partial y} = \frac{256}{25}(1^4 - 2 \cdot 1^3 + 1)(4y^3 - 6y^2 + 1) \equiv 0.$$

- $x_2 = 0, a_2$ немесе $y = 0, 1$ жақтарда

$$f(x, 0) = \frac{256}{25}(0^4 - 2 \cdot 0^3 + 0)(x^4 - 2x^3 + x) \equiv 0, ,$$

$$f(x, 1) = \frac{256}{25}(1^4 - 2 \cdot 1^3 + 1)(x^4 - 2x^3 + x) \equiv 0;$$

$$m_2(x, 0) = \left(\frac{16}{5}\right)^2 \left[(x^4 - 12x^3 + x)(12 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0) + \frac{\nu}{m^2}(12x^2 - 12x)(0^4 - 2 \cdot 0^3 + 0) \right];$$

$$m_2(x, 1) = \left(\frac{16}{5}\right)^2 \left[(x^4 - 12x^3 + x)(12 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1) + \frac{\nu}{m^2}(12x^2 - 12x)(1^4 - 2 \cdot 1^3 + 1) \right];$$

$$\frac{\partial f(x, 0)}{\partial x} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 (4x^3 - 6x^2 + 1)(0^4 - 2 \cdot 0^3 + 0);$$

$$\frac{\partial f(x, 1)}{\partial x} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 (4x^3 - 6x^2 + 1)(1^4 - 2 \cdot 1^3 + 1).$$

Майысудың үлкенін мәнін сыртқы және ішкі жүктемелердің жұмыстарының теңдігінен анықталады. Ол үшін (2.45) бойынша ішкі (P) және сыртқы (q) күштердің қарқындылықтары анықталады:

$$P_0 \cdot S(x, y) = q(x, y), \quad q(x, y) = q_0 \cdot pu(x, y), \quad pu(x, y) = 1;$$

$$S(x, y) = 24 \left(\frac{16}{5}\right)^2 \left[\frac{1}{m^2}(y^4 - 2y^3 + y) + 12(x^2 - x)(y^2 - y) + m^2(x^4 - 2x^3 + x) \right];$$

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{q_0 \cdot A_0}{A} = q_0 \alpha_0; \quad W_{\max} = \alpha_0 \frac{q_0 a_1^2 a_2^2}{D}; \\
A_0 &= \int_0^1 \int_0^1 p u(x, y) \cdot f(x, y) dx dy = \left(\frac{16}{5}\right)^2 \int_0^1 \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x)(y^4 - 2y^3 + y) dx dy = \frac{256}{625}; \\
A &= \int_0^1 \int_0^1 S(x, y) \cdot f(x, y) dx dy = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{16}{5}\right)^4 \frac{24}{m^2} (x^4 - 2x^3 + x)(y^4 - 2y^3 + y)^2 dx dy + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{16}{5}\right)^4 2 \cdot 12^2 (x^2 - x)(y^2 - y)(x^4 - 2x^3 + x)(y^4 - 2y^3 + y) dx dy + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{16}{5}\right)^4 24m^2 (x^4 - 2x^3 + x)(y^4 - 2y^3 + y)^2 dx dy = \frac{16^4 \cdot 4 \cdot 31}{5^5 \cdot 105} \left(\frac{1}{m^2} + \frac{17 \cdot 51}{14 \cdot 31} + m^2 \right);
\end{aligned}$$

мұнда A, A_0 ішкі және сыртқы күштердің тең әсерлі күштерінің жұмыстары;

Көлденең қима шеттері бекітілген жағдайда (2.28) сәйкес, (2.31), (2.32), (2.33) параметрлер анықталады:

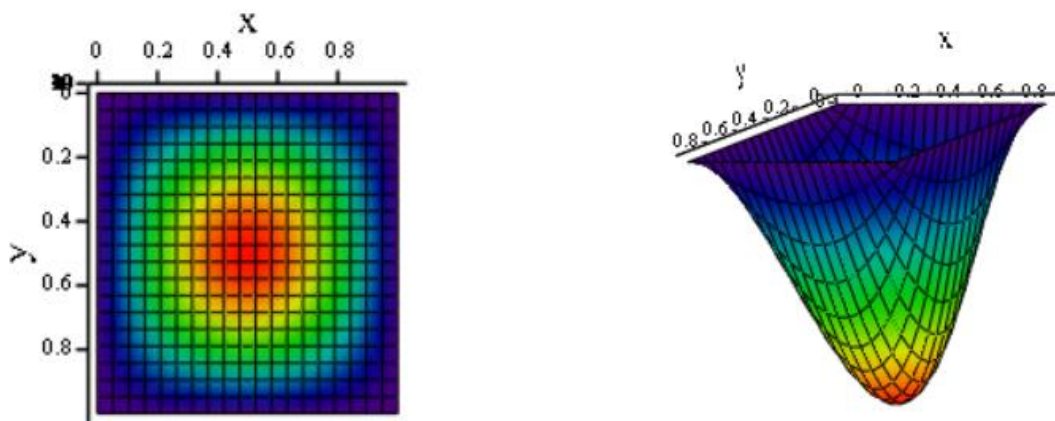
$$m_1 = 1, \quad n_1 = 1, \quad k^2 = \pi^2 \left[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right].$$

(2.22) бойынша g цилиндрлік қатандың параметрін есептеледі, (2.21) бойынша γ_0 көлденең ығысу параметрі анықталады.

$$\begin{aligned}
g &= \left(1 + \frac{n^2 h^2 \pi^2}{10} \left[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right] \right)^{-1}. \\
\gamma_0 &= \frac{\pi^2 h^2}{8} \left(\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_1^2} + \pi^2 h^2 n^2 \right).
\end{aligned}$$

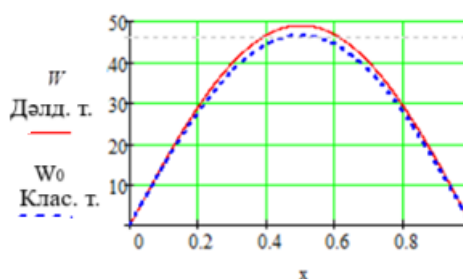
Көлденең ығысуды ескергендегі жылжулар компоненттері (2.53) жалпы майысу функциясын қолдана отырып төмендегідей анықталады

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{h \cdot \varphi(z) W_*}{g a_1} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\frac{h \cdot \varphi(z) W_*}{g a_1} \left(\frac{16}{5}\right)^2 (4x^3 - 6x^2 + 1)(y^4 - 2y^3 + y), \quad x = \frac{x_1}{a_1}; \\
u_2 &= -\frac{h \cdot \varphi(z) W_*}{g a_2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{h \cdot \varphi(z) W_*}{g a_2} \left(\frac{16}{5}\right)^2 (x^4 - 2x^3 + x)(4y^3 - 6y^2 + 1), \quad y = \frac{x_2}{a_2}; \\
u_3 &= \frac{\alpha_0}{g} \frac{q_0 a_1^2 a_2^2}{D} \left(\frac{16}{5}\right)^2 (x^4 - 2x^3 + x)(y^4 - 2y^3 + y).
\end{aligned}$$

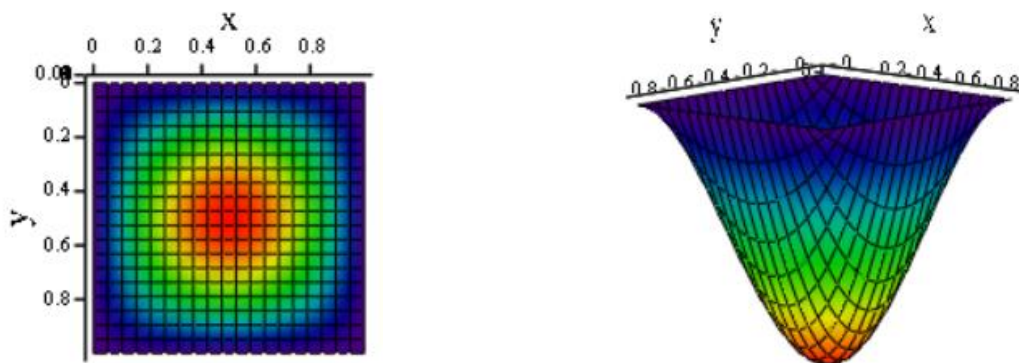


Сурет 4.1.2 – Квадрат пластинаның W көлденең майысуының изоклинасы мен эпюрасы ($\nu = 0,25$).

Майысудың максималды мәні пластинаның $x=0,5$; $y=0,5$ нүктесінде пайда болады (сурет 4.1.2). $\bar{W} = \frac{W \cdot D}{q_0 a_1^4}$ арқылы өлшемсіз майысу айнымалысын белгілеп аламыз. Пластинаның ортасында классикалық теория бойынша максималды өлшемсіз майысу мәні $0,4137$ ($100 \cdot \bar{W}$) тең, ал көлденең ығысуды ескергенде максималды майысу мәні $0,4354$ ($100 \cdot \bar{W}$) тең болады. Классикалық теорияның мәні 5% дәлденеді.



Сурет 4.1.3 – Квадрат пластинаның W , W_0 көлденең майысулары (2.18), (2.43) өрнектерін қолдана отырып пластинаның моменттері табылады.



Сурет 4.4 – Квадрат пластинаның M_1 моментінің изоклинасы мен эпюрасы ($\nu = 0,25$).

Горизонтал бағытта M_1 моменті:

$$M_1 = -M_1^0 \left(\frac{16}{5} \right)^2 \cdot 12 \left((x^2 - x)(y^4 - 2y^3 + y) + \nu m^2 (x^4 - 2x^3 + x)(y^2 - y) \right), M_1^0 = \alpha q_0 a_2^2;$$

вертикал бағытта M_2 моменті:

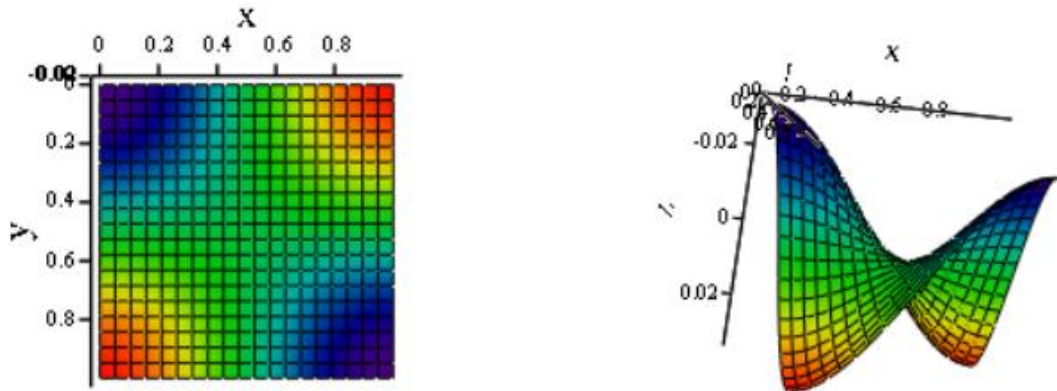
$$M_2 = -M_2^0 \left(\frac{16}{5} \right)^2 12 \left[(x^4 - 12x^3 + x)(y^2 - y) + \frac{\nu}{m^2} (x^2 - x)(y^4 - 2y^3 + y) \right], M_2^0 = \alpha_0 q_0 a_1^2;$$

M_1 және M_2 үшін максималды мән пластинаның $x=0,5$; $y=0,5$ нүктесінде пайда болады (сурет 4.1.4) және бірдей өлшемсіз мәнге ие $M_1 = M_2 = 0,04964$.

Бұралу моменті келесі түрде табылады:

$$M_{12} = -M_{12}^0 \left(\frac{16}{5} \right)^2 (4x^3 - 6x^2 + 1)(4y^3 - 6y^2 + 1), M_{12}^0 = \alpha q_0 (1 - \nu) a_1 a_2;$$

оның максималды мәні 0,0318 тең және $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ пластинаның төбелерінде симметриялы болады.



Сурет 4.1.5 – Квадрат пластинаның M_{12} бұралу моментінің изоклинасы мен эпюрасы ($\nu = 0,25$).

(2.18), (2.44) өрнектерін қолдана отырып пластинаның көлденең күштері анықталады:

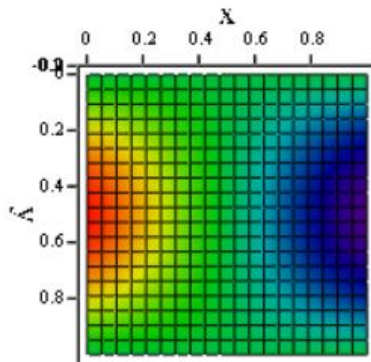
- горизонтал бағытта

$$Q_1 = -Q_1^0 \left(\frac{16}{5} \right)^2 \left[(24x - 12)(y^4 - 2y^3 + y) + m^2 (4x^3 - 6x^2 + 1)(12y^2 - 12y) \right], Q_1^0 = \frac{\alpha_0 q_0 a_2^2}{a_1};$$

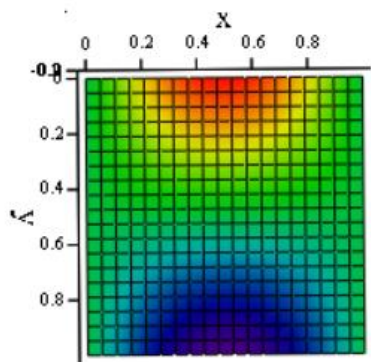
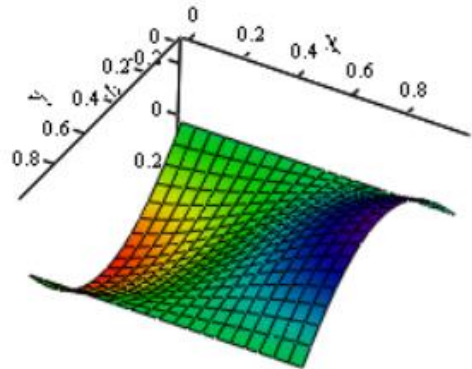
- вертикал бағытта

$$Q_2 = -Q_2^0 \left(\frac{16}{5} \right)^2 \left[(x^4 - 2x^3 + x)(24y - 12) + \frac{1}{m^2} (12x^2 - 12x)(4y^3 - 6y^2 + 1) \right], \quad Q_2^0 = \frac{\alpha_0 q_0 a_1^2}{a_2}.$$

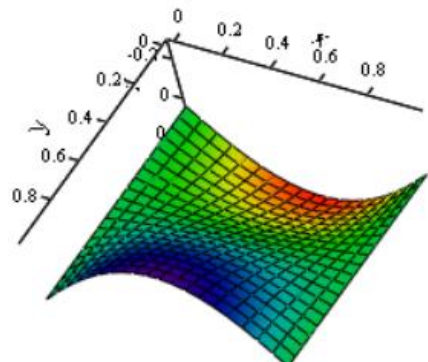
Q_1, Q_2 үшін максималды мән пластинаның сәйкесінше $x=0; y=0,5$ және $x=0,5; y=0$ нүктесінде пайда болады (сурет 4.1.6, 4.1.7) және бірдей өлшемсіз мәнге ие $Q_1 = Q_2 = 0,0286$.



Сурет 4.1.6 – Квадрат пластинаның Q_1 көлденең күші ($\nu = 0,25$).



Сурет 4.1.7 – Квадрат пластинаның Q_2 көлденең күші ($\nu = 0,25$).



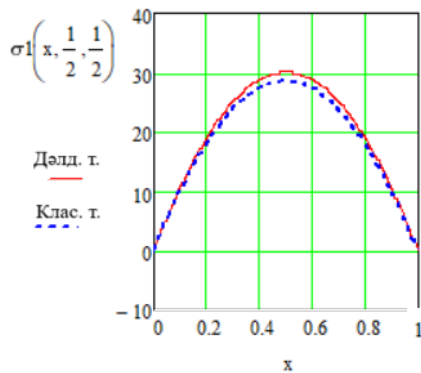
Пластинаның кернеулер компоненттерін (2.54) бойынша анықтаймыз, максималды нормал кернеулердің есептеу нәтижелері, максималды жанама кернеулердің графиктері сурет 4.1.8-4.1.13 келтірілген. Нормал және жанама кернеулердің өлшемсіз түрлерінің мәндері келесі түрде қолданылады

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 \frac{h^2}{q_0 a_2^2}, \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2 \frac{h^2}{q_0 a_2^2}, \quad \bar{\tau}_{12} = \tau_{12} \frac{h^2}{q_0 a_2^2}, \quad \bar{\tau}_{13} = \tau_{13} \frac{h}{q_0 a_2}, \quad \bar{\tau}_{23} = \tau_{23} \frac{h}{q_0 a_2}.$$

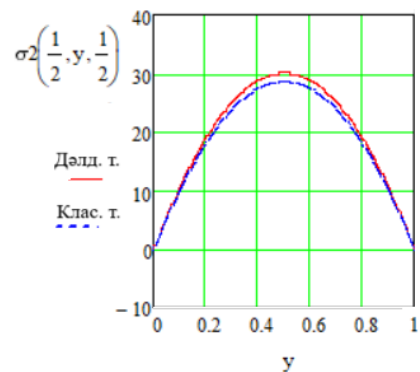
Көлденең және тік бағытта нормал кернеулердің мәні бірдей болады және өлшемсіз мәні $\sigma_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \sigma_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = 0,3005$ тең. Жанама

кернеулерлердің максималды өлшемсіз мәндері $h=0,1$ тең болады:

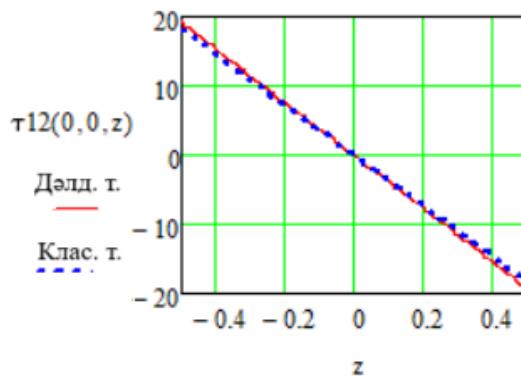
$$\tau_{12}\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)=0,1906, \quad \tau_{13}\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)=0,4279, \quad \tau_{23}\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)=0,4279.$$



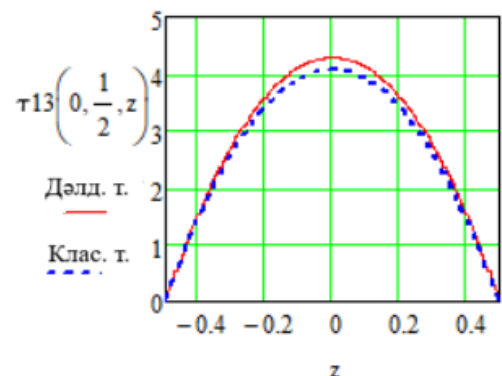
Сурет 4.1.8 – Квадрат пластинаның σ_1 нормал кернеулердің максималды мәндер графигі ($\nu=0,25$).



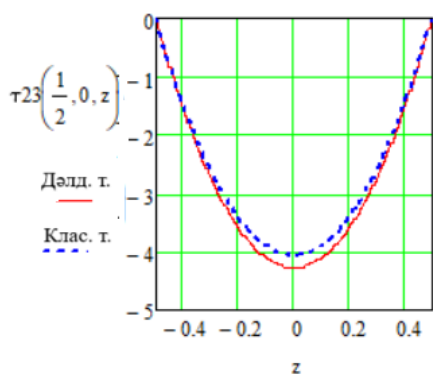
Сурет 4.1.9 – Квадрат пластинаның σ_2 нормал кернеулердің максималды мәндер графигі ($\nu=0,25$).



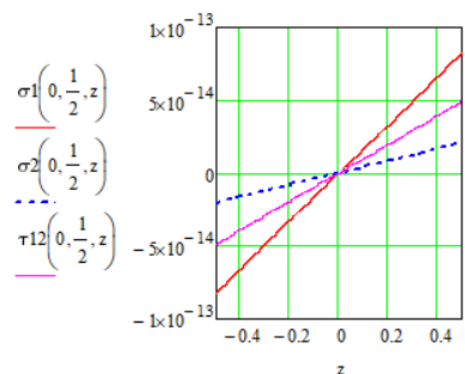
Сурет 4.1.10 – Квадрат пластинаның $\bar{\tau}_{12}$ жанама кернеулердің максималды мәндер графигі ($\nu=0,25$).



Сурет 4.1.11 – Квадрат пластинаның $\bar{\tau}_{13}$ жанама кернеулердің максималды мәндер графигі ($\nu=0,25$).



Сурет 4.1.12 – Квадрат пластинаның $\bar{\tau}_{22}$ жанама кернеулердің максималды мәндер графигі ($\nu=0,25$).



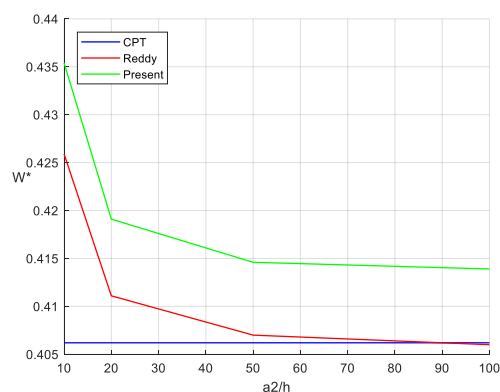
Сурет 4.1.13 – Квадрат пластинаның $\sigma_1, \sigma_2, \bar{\tau}_{12}$ кернеулерінің биіктік бойынша $(0, 0,5)$ нүктесінде өзгеруі

Кесте 4.1 - Біртекті таралған жүктеме әсер еткенде квадрат пластинаның көлденең ығысу деформациясын ескергендегі майысуы мен кернеулері

a_2/h	$\bar{W}$	$\bar{\sigma}_1$	$\bar{\sigma}_2$	$\bar{\tau}_{12}$	$\bar{\tau}_{13}$	$\bar{\tau}_{23}$
Классикалық теория						
	0,4062	0,2762	0,2762	0,2085		-
І ретті ығысу теориясы (Reddy)						
10	0,4259	0,2762	0,2762	0,2085	0,3927	0,3927
20	0,4111	0,2762	0,2762	0,2085	0,3927	0,3927
50	0,407	0,2762	0,2762	0,2085	0,3927	0,3927
100	0,406	0,2762	0,2762	0,2085	0,3927	0,3927
Ұсынылған әдіс						
10	0,4354 (2,18%)	0,3005 (4,39%)	0,3005 (4,39%)	0,1923 (1,20%)	0,4279 (8,23%)	0,4279 (8,23%)
20	0,4191 (1,91%)	0,2985 (7,47%)	0,2985 (7,47%)	0,1911 (9,11%)	0,4276 (8,16%)	0,4276 (8,16%)
50	0,4146 (1,83%)	0,2979 (7,28%)	0,2979 (7,28%)	0,1977 (5,46%)	0,4287 (8,40%)	0,4287 (8,40%)
100	0,4139 (1,91%)	0,2979 (3,56%)	0,2979 (3,56%)	0,1907 (2,05%)	0,4289 (8,44%)	0,4289 (8,44%)

Кесте 4.1 біртекті таралған жүктеме әсер еткенде квадрат пластинаның көлденең ығысу деформациясын ескергендегі жетілдірілген әдіс бойынша және пластинаның бірінші ретті ығысу теориясы бойынша Reddy [49] алған максималды өлшемсіз майысу, өлшемсіз нормал және жанама кернеулердің мәндері, классикалық теория бойынша мәндер келтіріледі. Пластинаның классикалық теориясында өлшемсіз шамалар пластина жақтары мен биіктігінің қатынасына тәуелді емес. Бірінші ретті ығысу теориясында көлденең кернеулер x_3 немесе z координатсынан тәуелді болмайды, яғни биіктік бойынша тұрақты болады. Нәтижесінде көлденең ығысудың әсері майсудың өсуіне алып келеді. Ал ұсынылған әдіс бойынша көлденең кернеулер x_3 немесе z координатсынан тәуелді болады, сондықтан олардың мәні пластинаның қалыңдығы өскен сайын өзгеріп отырады.

Пластинаның классикалық теориясы, бірінші ретті ығысу теориясы мен ұсынылған әдіс бойынша алынған майысулардың айырмашылық графигі сурет 4.1.14 көрсетілген.



Сурет 4.1.14 – Топсалы тірелген квадрат пластинаның ұзындық пен биіктік қатынасына байланысты өлшемсіз майысулардың өзгеру графигі

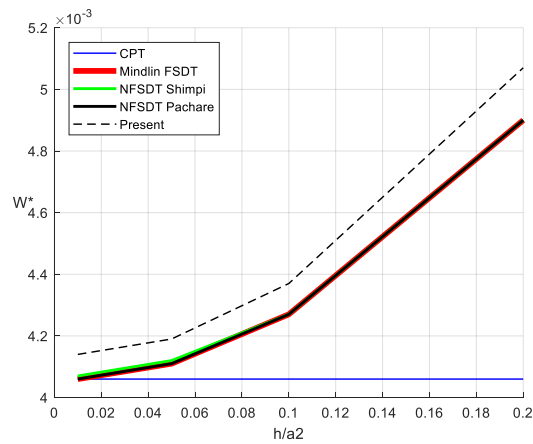
4.2-кестеде пластинаның орта нүктедегі майысудың ұсынылған әдіс бойынша алынған өлшемсіз мәндері, Shimpri алған классикалық теория бойынша, Mindlin-нің бірінші ретті ығысу теориясы бойынша, Shimpri мен Pachare ұсынған бірінші ретті ығысу теориясының жаңа нұсқасы бойынша алынған өлшемсіз мәндері берілген. Пластина пішіні квадратты, материалы изотропты, Пуассон коэффициенті $\nu=0,3$ тең және біртекті таралған жүктеме әсерінен майысады.

Кесте 4.2 - Біртекті таралған жүктеме әсер еткенде квадрат пластинаның әр түрлі теориялар бойынша алынған максималды майысудың өлшемсіз мәндері.

Теориялар	$h/a_1=0,01$	$h/a_1=0,05$	$h/a_1=0,1$	$h/a_1=0,2$
Ұсынылған әдіс	0,00414	0,00419	0,00437	0,00507
Shimpri бойынша классикалық теория [39]	0,00406 (1,93%)	0,00406 (3,10%)	0,00406 (2,29%)	0,00406 (19,92%)
Mindlin пластина теориясы [50]	0,00406 (1,93%)	0,00411 (1,91%)	0,00427 (2,29%)	0,0049 (3,35%)
Shimpri бойынша бір айнымалы жаңа бірінші ретті ығысу теориясы [39]	0,00407 (1,69%)	0,00412 (1,67%)	0,00426 (2,52%)	0,0049 (3,35%)
Pachare бойынша бірінші ретті ығысу теориясы [42]	0,00406 (1,93%)	0,00411 (1,91%)	0,00427 (2,29%)	0,0049 (3,35%)

Алынған нәтижелерден ұсынылған әдістің ұқсас бірінші ретті ығысу теорияларға қарағанда салыстырмалы қателегі 3,35% аспайтынын көреміз. 4.2 кестеге сәйкес топсалы тірелген квадрат пластинаның әр түрлі теориялар

бойынша алынған өлшемсіз майысулардың биіктік пен ұзындық қатынасына байланысты өзгеру графигі сурет 4.1.15 берілген.



Сурет 4.1.15 – Топсалы тірелген квадрат пластинаның әр түрлі теориялар бойынша алынған өлшемсіз майысулардың биіктік пен ұзындық қатынасына байланысты өзгеруі

Пластинаның тік реакциялары және олардың теңгеруші күштері анықтаймыз:

$$\begin{aligned}
 R_1(0, y) = Q_1(0, y) &= -\frac{120}{m_0} \left[\frac{1}{m^2} X'''(0)Y(y) + X'(0)Y''(y) \right] Q_1^0 = \\
 &= -\frac{1}{m_0} \left(\frac{5}{2} \right) \left[-\frac{1}{m^2} (y^4 - 2y^3 + y) + (y^2 - y) \right] Q_1^0, \\
 R_1(1, y) = -Q_1(0, y) &= \frac{120}{m_0} \left[\frac{1}{m^2} X'''(1)Y(y) + X'(1)Y''(y) \right] Q_1^0 = \\
 &= \frac{1}{m_0} \left(\frac{5}{2} \right) \left[\frac{1}{m^2} (y^4 - 2y^3 + y) - (y^2 - y) \right] Q_1^0, \\
 R_2(x, 0) = Q_2(x, 0) &= -\frac{120}{m_0} \left[m^2 X(x)Y'''(0) + X''(x)Y'(0) \right] Q_2^0 = \\
 &= -\frac{1}{m_0} \left(\frac{5}{2} \right) \left[-m^2 (x^4 - 2x^3 + x) + (x^2 - x) \right] Q_2^0, \\
 R_2(x, 1) = -Q_2(x, 1) &= \frac{120}{m_0} \left[m^2 X(x)Y'''(1) + X''(x)Y'(1) \right] Q_2^0 = \\
 &= \frac{1}{m_0} \left(\frac{5}{2} \right) \left[m^2 (x^4 - 2x^3 + x) - (x^2 - x) \right] Q_2^0.
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} R_{10} &= \ell_2 \int_0^1 R_1(0, y) dy = -\frac{120}{m_0} \left[\frac{1}{m^2} X'''(0) j + X'(0) j_2 \right] Q_1^0 \ell_2 = \frac{1}{2m_0} \left[\frac{1}{m^2} + \frac{5}{6} \right] Q_1^0 \ell_2, \\ R_{11} &= \ell_1 \int_0^1 R_1(1, y) dy = \frac{120}{m_0} \left[\frac{1}{m^2} X'''(1) j + X'(0) j_2 \right] Q_1^0 \ell_2 = \frac{1}{2m_0} \left[\frac{1}{m^2} + \frac{5}{6} \right] Q_1^0 \ell_2, \\ R_{20} &= \ell_1 \int_0^1 R_2(x, 0) dx = -\frac{120}{m_0} \left[m^2 i Y'''(0) + i_2 Y'(0) \right] Q_2^0 \ell_1 = \frac{1}{2m_0} \left[m^2 + \frac{5}{6} \right] Q_2^0 \ell_1, \\ R_{21} &= \ell_1 \int_0^1 R_2(x, 1) dx = \frac{120}{m_0} \left[m^2 i Y'''(1) + i_2 Y'(0) \right] Q_2^0 \ell_1 = \frac{1}{2m_0} \left[m^2 + \frac{5}{6} \right] Q_2^0 \ell_1, \end{aligned} \right.$$

Пластинаның контурының толық реакциясы

$$\begin{aligned} R &= R_{10} + R_{11} + R_{20} + R_{21} = \frac{120q_0 \ell_1 \ell_2}{m_0} \left\{ \frac{j}{m^2} [-X'''(0) + X'''(1)] + \right. \\ &+ j_2 [-X'(0) + X'(1)] + m^2 i [-Y'''(0) + Y'''(1)] + i_2 [-Y'(0) + Y'(1)] \Big\} = \\ &= \frac{120q_0 \ell_1 \ell_2}{m_0} \left\{ \frac{1}{120m^2} + \frac{1}{12} \frac{1}{12} + \frac{m^2}{120} + \frac{1}{12} \frac{1}{12} \right\} = q_0 \ell_1 \ell_2 \end{aligned}$$

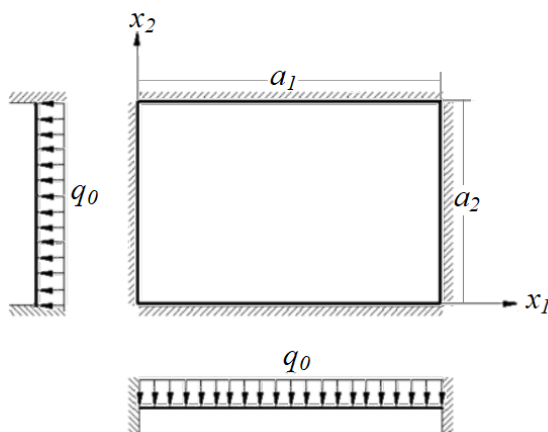
Сонымен, біртекті таралған жүктеме әсерінен топсалы тірелген пластинаның кернеулік және деформациялық күйі көлденең ығысу деформациясын ескеру арқылы кешенді түрде зерттелді. Пластинаның майысу функциясы арқалықтардың иілу функциялары негізінде анықталды. Есептеу нәтижелері көрсеткендей, көлденең ығысу деформациясын ескерген жағдайда, пластинадағы жылжулардың артуы байқалады, ал жанама кернеулердің шамасы азаяды. Ұсынылған әдіс арқылы алынған нәтижелер әдебиеттегі дәлелденген теориялық шешімдермен салыстырылып, олардың өзара сәйкестігі негізінде әдістің дұрыстығы мен тиімділігі дәлелденді.

4.2 Әртүрлі бекінісі бар пластиналардың таралған жүктеме әсерінен иілуі

Бұл тармақта қарастырылатын есептердің шығару реті 2.3 тармақта берілген есептеу алгоритмі бойынша жүргізіледі және жоғарыда келтірілген мысалда толық ашып жазылғандықтан жұмысты ықшамдау үшін қысқаша түрде сипатталатып, негізгі мәндер ғана берілетін болады. Барлық есептеулер MathCAD бағдарламалық пакетте орындалды.

4.2.1 Контуры қатты бекітілген пластинаның иілуі

$(0 \leq x_1 \leq a_1, 0 \leq x_2 \leq a_2, -\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2})$ координаттық жүйеде тікбұрышты пластинаны қарастырайық. Пластинаның $x_1 = 0, x_1 = a_1, x_2 = 0, x_2 = a_2$ жақтары қатты бекітілген болсын, ал жоғарғы бетіне біртекті таралған жүктеме әсер етсін (сурет 4.2.1). Пластина материалы изотропты және Пуассон коэффициенті 0,3 тең.



Сурет 4.2.1 – Барлық жақтары қатты бекітілген квадрат пластинаның геометриясы мен координаттық жүйесі.

Алгоритмге сәйкес алдымен пластинаның классикалық теория бойынша шешімін (2.40) түрінде тауып аламыз.

Горизонтал және вертикал бағытта арқалықтардың өлшемсіз нормаланған иілім функцияларын (2.58), (2.67), (2.68) өрнектерінен сыртқы жүктеменің таралау заңы $p(x, y) = 1$ болған жағдайда анықталып мына түрде жазылады [51]:

$$W_0(x_1, x_2) = W_* f(x, y) = \alpha_0 \frac{q_0 a_1^2 a_2^2}{D} 16^2 (x^4 - 2x^3 + x^2)(y^4 - 2y^3 + y^2)$$

мұндағы $x = x_1/a_1, y = x_2/a_2$.

$f(x, y)$ өлшемсіз функциясының туындаларын және ішкі күштердің таралуын анықтаймыз. Көлденең қима шеттері қатты бекітілген жағдайда (2.28) сәйкес, (2.31), (2.32), (2.33) параметрлер анықталады:

$$m_1 = 1, \quad n_1 = 1, \quad k^2 = \pi^2 \left[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right].$$

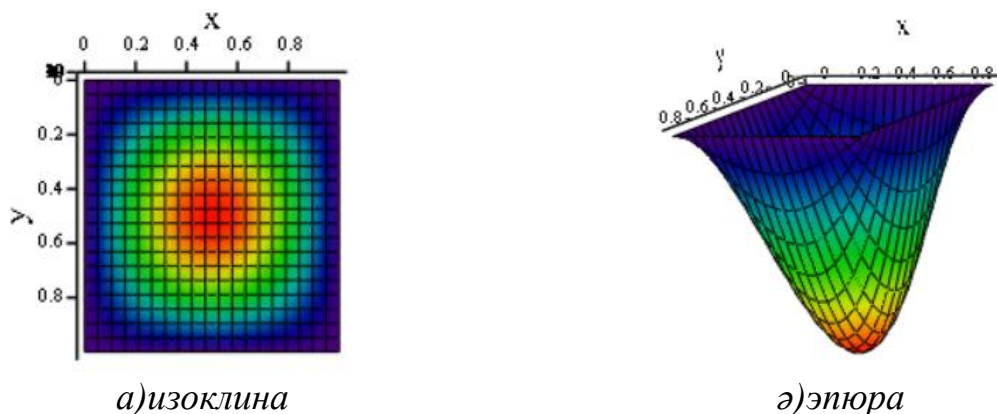
(2.22) бойынша g цилиндрлік қатаңдың параметрін есептеледі, (2.21) бойынша γ_0 көлденең ығысу параметрі анықталады.

$$g = \left(1 + \frac{n^2 h^2 \pi^2}{10} \left[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right] \right)^{-1}.$$

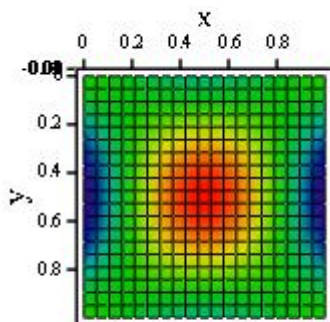
$$\gamma_0 = \frac{\pi^2 h^2}{8} \left(\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_1^2} + \pi^2 h^2 n^2 \right).$$

Қатты бекінген пластинаның көлденең иілуі кезінде максималды мән пластина центрінде пайда болады, ал ең үлкен иілу моменті бекітілген шетінің ортасында (сурет 4.2.2, 4.2.3).

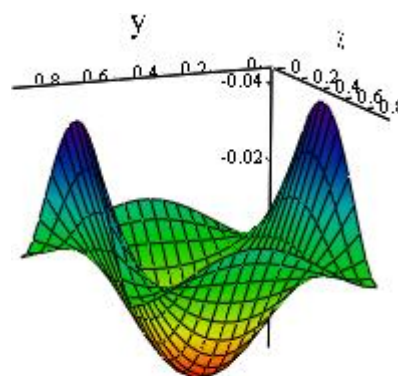
Изотропты квадрат пластинаның максималды майысу мәндері ұсынылған теория бойынша $W(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}) = 0,00134(q_0 a_1^4 / D)$, классикалық теория бойынша [52] $W(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}) = 0,00126(q_0 a_1^4 / D)$ мен Reddy бойынша $W(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}) = 0,00133(q_0 a_1^4 / D)$ [49] тең болады. Бұдан ұсынылған теориямен алынған мән Reddy дәлденген теориясының мәніне өте ұқсас екенін көреміз. Кесте 4.2.1-де ал С.П. Тимошенко әдісі бойынша пластина ортасыда пайда болатын максималды мәндері беріледі және арқалық функцияларымен анықталған майысу мәндерінің салыстырмалы айырмашылығы берілген.



Сурет 4.2.2 – Барлық жақтары қатты бекітілген квадрат пластинаның майысуның а) изоклины мен ә) эпюрасы.



а)изоклина



ә)эпюра

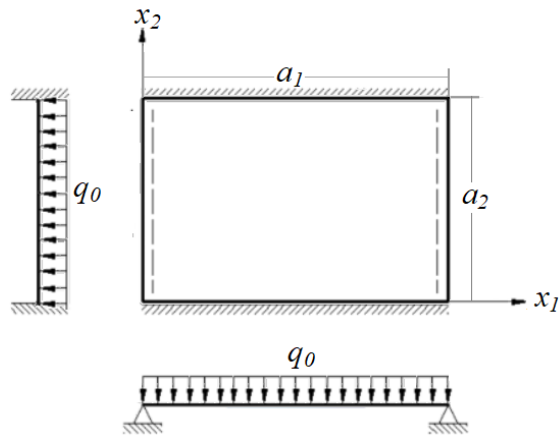
Сурет 4.2.3 – Барлық жақтары қатты бекітілген квадрат пластинаның иілу моменттерінің а) изоклины (M_1) мен ә) эпюрасы (M_2).

Кесте 4.2.1 - Біртекті таралған жүктеме әсер еткенде контуры қатты бекітілген квадрат пластинаның көлденең ығысу деформациясын ескергендегі майысуы мен классикалық теория бойынша майысу мәндері

a_2 / a_1	Ұсынылған теория	Классикалық теория	
1	0,00133	0,00126	5,26%
1,1	0,00159	0,00150	5,66%
1,2	0,00182	0,00172	5,49%
1,3	0,00203	0,00191	5,91%
1,4	0,00220	0,00207	5,91%
1,5	0,00236	0,00220	6,78%
1,6	0,00249	0,00230	7,63%
1,7	0,00259	0,00238	8,11%
1,8	0,00269	0,00245	8,92%
1,9	0,00277	0,00249	10,11%
2	0,00284	0,00254	10,56%

4.2.2 Қарама-қарсы екі жағы топсалы тірелген және екі жағы қатты бекітілген пластинаның иілуі

Қабырғаларының ұзындығы a_1, a_2 , ал қалыңдығы h болатын пластинаны $(0 \leq x_1 \leq a_1, 0 \leq x_2 \leq a_2, -\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2})$ координаттық жүйеде қарастырайық. Пластинаның қарама-қарсы жақтары топсалы тірелген және қатаң бекітілген болсын және оған қарқындылығы біртекті жүктеме әсер етсін. (сурет 4.3). Пластина материалы изотропты және біртекті.



Сурет 4.3 - Қарама-қарсы екі жағы топсалы тірелген және екі жағы қатты бекітілген пластина

Пластинаның өлшемсіз майысу функциясы $f(x, y)$ (2.59) бойынша мына түрде алынады.

$$f(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$X(x) = 16(x^4 - 2x^3 + x), \quad Y(y) = \frac{16}{5}(y^4 - 2y^3 + y^2)$$

$\nu = 0,3$ және пластина квадраттық болғанда: (2.22) бойынша цилиндрлік қатаңдың параметрі $g = 0,9861$ мен (2.21) бойынша көлденең ығысу параметрі $\gamma_0 = 0,006$ болады.

Максималды майысу мәнінің көрсеткіші $\alpha_0 = 0,001988$.

Изотропты квадрат пластинаның максималды майысу, иілу моменттерінің мәндері ұсынылған теория бойынша

$$W\left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}\right) = 0,001989(q_0 a_1^4 / D),$$

$$M_1\left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}\right) = 0,003754 q_0 a_1^4$$

$$M_2\left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}\right) = 0,02863 q_0 a_1^2$$

Reddy бойынша [49]

$$W\left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}\right) = 0,001962(q_0 a_1^4 / D),$$

$$M_1\left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}\right) = 0,003461 q_0 a_1^4$$

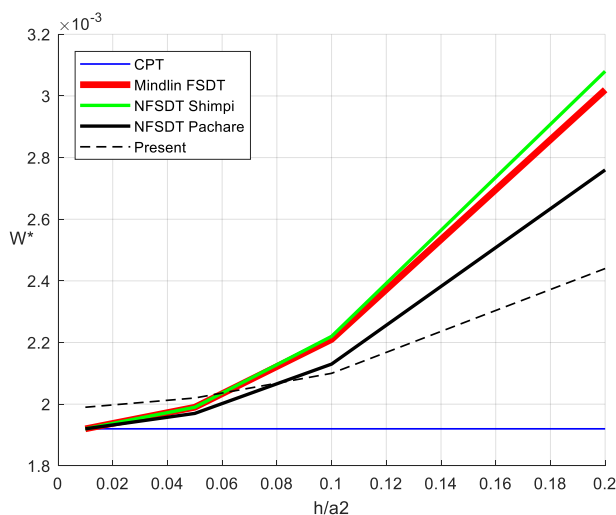
$$M_2\left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}\right) = 0,028 q_0 a_1^2.$$

Бұдан ұсынылған теориямен алынған мәндер мен Reddy дәлденген теориясының мәндері арасындағы майысу бойынша алшақтық 1,36%. құрайды, ал моменттерінің алшақтығы 2-7%.

Кесте 4.2.2-де Shimpі және Pachare ұсынған дәлденген теориялардың нәтижелерімен арқалық функцияларымен табылған өлшемсіз максималды майысудың мәндері беріледі, ал сурет 4.2.4 биіктік пен ұзындық қатынасы бойынша өзгеру мәндері график түрінде келтіріледі. Жұқа пластина үшін айырмашылық 1-5% болатынын көреміз.

Кесте 4.2.2 - Біртекті таралған жүктеме әсер еткенде квадрат пластинаның әр түрлі теориялар бойынша алынған максималды майысудың өлшемсіз мәндері.

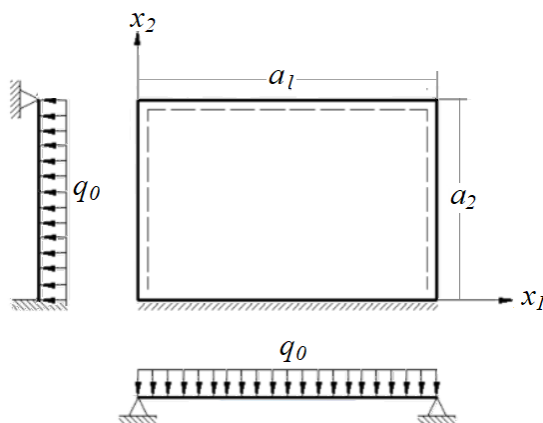
Теориялар	h/a			
	0,01	0,05	0,10	0,20
Ұсынылған әдіс	0,00199	0,00202	0,00210	0,00244
Shimpі бойынша классикалық теория [39]	0,00192 (3,52%)	0,00192 (4,95%)	0,00192 (8,57%)	0,00192 (21,31%)
Mindlin пластина теориясы [50]	0,00192 (3,52%)	0,00199 (1,49%)	0,00221 (5,24%)	0,00302 (23,77%)
Shimpі бойынша бір айнымалы жаңа бірінші ретті ығысу теориясы [39]	0,00192 (3,52%)	0,00199 (1,49%)	0,00222 (5,71%)	0,00308 (26,23%)
Pachare бойынша бірінші ретті ығысу теориясы [41]	0,00192 (3,52%)	0,00197 (2,48%)	0,00213 (1,43%)	0,00276 (13,11%)



Сурет 4.2.4 –Әр түрлі теориялар бойынша алынған өлшемсіз майысулардың биіктік пен ұзындық қатынасына байланысты өзгеруі

4.2.3 Үш шеті топсалы тірелген және бір шеті қатты бекітілген пластинаның иілуі

$(0 \leq x_1 \leq a_1, 0 \leq x_2 \leq a_2, -\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2})$ координаттық жүйеде тікбұрышты пластинаны қарастырайық. Пластинаның $x_1 = 0, x_1 = a_1, x_2 = a_2$ жақтары топсалы және $x_2 = 0$ қатты бекітілген болсын, ал жоғарғы бетіне біртекті таралған жүктеме әсер етсін (сурет 4.2.1). Пластина материалы изотропты және Пуассон коэффициенті 0,3 тең.



Сурет 4.2.3 - Үш шеті топсалы тірелген және бір шеті қатты бекітілген пластина

Пластинаның өлшемсіз майысу функциясы $f(x, y)$ (2.57), (2.59) формула бойынша анықталады:

$$f(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$X(x) = \frac{16}{5}(x^4 - 2x^3 + x), \quad Y(y) = 8y^4 - 20y^3 + 12y.$$

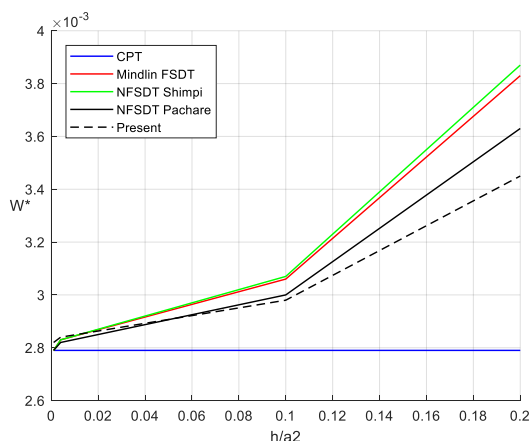
$\nu = 0,3$ және пластина квадраттық болғанда: (2.22) бойынша цилиндрлік қатандың параметрі $g = 0,99943$ мен (2.21) бойынша көлденең ығысу параметрі $\gamma_0 = 0,006$. Максималды майысу мәнінің көрсеткіші $\alpha_0 = 0,001988$.

Кесте 4.2.3 –те Тимошенко бойынша классикалық теория, Shimpri және Rachare, Zenkouг ұсынған дәлденген теориялардың нәтижелерімен арқалық функцияларымен табылған өлшемсіз максималды майысудың мәндері беріледі,

Сурет 4.2.4 биіктік пен ұзындық қатынасы бойынша өзгеру мәндері график түрінде келтіріледі. Жұқа пластина үшін айырмашылық 1-5% болатынын көреміз.

Кесте 4.2.3 – Біртекті таралған жүктеме әсер еткенде квадрат пластинаның әр түрлі теориялар бойынша алынған максималды майысудың өлшемсіз мәндері.

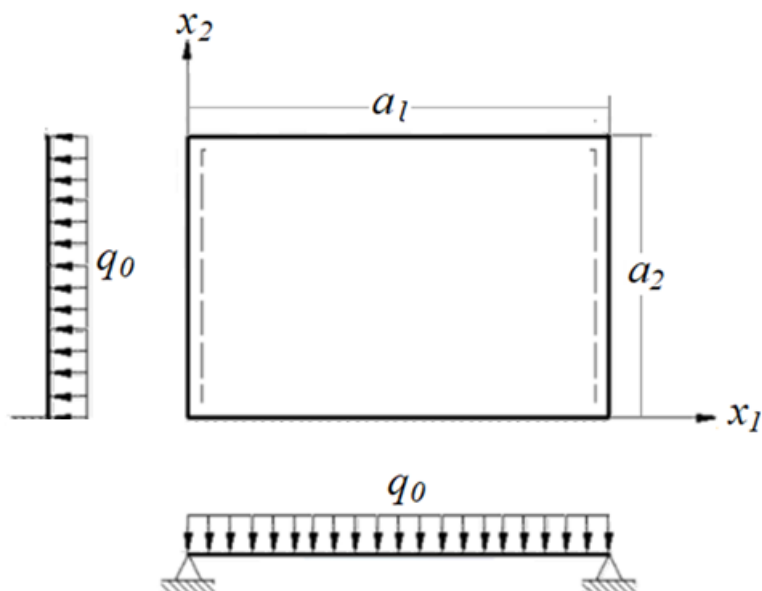
Теориялар	h/a			
	0,001	0,04	0,10	0,20
Ұсынылған теория	0,00282	0,00284	0,00298	0,00345
Классикалық теория [52]	0,00279 (1,06%)	0,00279 (1,76%)	0,00279 (6,38%)	0,00279 (19,13%)
Zenkour бойынша ығысу теориясы [53]	0,00279 (1,06%)	0,00283 (0,35%)	0,00306 (2,68%)	0,00383 (11,01%)
Shimpi бойынша бір айнымалы жаңа бірінші ретті ығысу теориясы [39]	0,00279 (1,06%)	0,00283 (0,35%)	0,00307 (3,02%)	0,00387 (12,17%)
Pachare бойынша бірінші ретті ығысу теориясы [41]	0,00279 (1,06%)	0,00282 (0,70%)	0,00300 (0,67%)	0,00363 (5,22%)



Сурет 4.2.5 – Әртүрлі теориялар бойынша алынған максимал өлшемсіз майысулардың биіктік пен ұзындық қатынасына байланысты өзгеруі

4.2.4 Қарама-қарсы екі шеті топсалы тірелген және екі шеті бос пластинаның иілуі

$(0 \leq x_1 \leq a_1, 0 \leq x_2 \leq a_2, -\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2})$ координаттық жүйеде тікбұрышты пластинаны қарастырайық. Пластинаның $x_1 = 0, x_1 = a_1$ жақтары топсалы тірелген, $x_2 = a_2, x_2 = 0$ бос болсын, ал жоғарғы бетіне біртекті таралған жүктеме әсер етсін (сурет 4.2.5). Пластина материалы изотропты және Пуассон коэффициенті 0,3 тең.



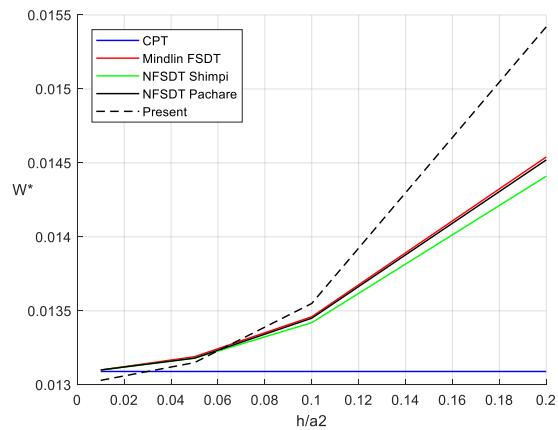
Сурет 4.2 6 - Қарама-қарсы екі шеті топсалы тірелген және екі шеті бос платина

Берілген есеп әдебиеттерде пластинаның цилиндрлік иілу есебі ретінде белгілі және де оның шешімі арқалық-жолақ шешімі арқылы табылады. Сондықтан пластинаның өлшемсіз майысу функциясы $f(x, y)$ топсалы тірелген арқалықтың (2.57) шешімі мен ені бірге теңестіріліп анықталады:

$$f(x, y) = X(x)Y(y); \quad X(x) = \frac{16}{5}(x^4 - 2x^3 + x), \quad Y(y) = 1.$$

Кесте 4.2.4 – Біртекті таралған жүктеме әсер еткенде квадрат пластинаның әр түрлі теориялар бойынша алынған максималды майысудың өлшемсіз мәндері.

Теориялар	h / a			
	0,01	0,05	0,10	0,20
Ұсынылған теория	0,01303	0,01315	0,01355	0,01542
Shimpi бойынша классикалық теория [39]	0,01309 (0,46%)	0,01309 (0,46%)	0,01309 (3,39%)	0,01309 (15,11%)
Mindlin пластина теориясы [50]	0,01310 (0,54%)	0,01319 (0,30%)	0,01346 (0,66%)	0,01454 (5,71%)
Shimpi бойынша бір айнымалы жаңа бірінші ретті ығысу теориясы [39]	0,01310 (0,54%)	0,01318 (0,23%)	0,01342 (0,96%)	0,01441 (6,55%)
Pachare бойынша бірінші ретті ығысу теориясы [41]	0,01310 (0,54%)	0,01318 (0,23%)	0,01345 (0,74%)	0,01452 (5,84%)



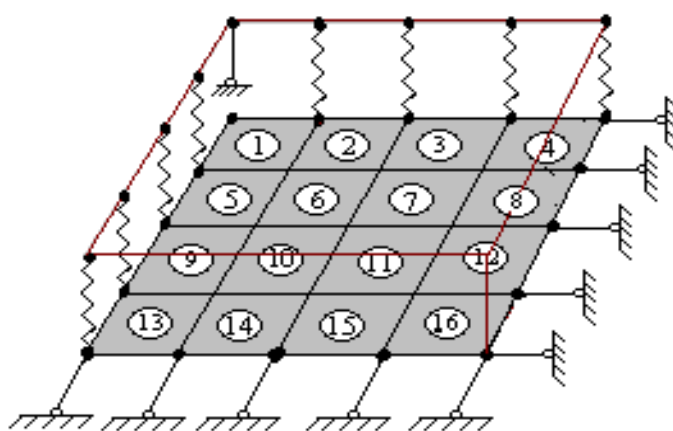
Сурет 4.2.7 –Әр түрлі теориялар бойынша алынған өлшемсіз майысулардың биіктік пен ұзындық қатынасына байланысты өзгеруі

Кесте 4.2.4-де Shimpi және Pachare ұсынған дәлденген теориялардың нәтижелерімен арқалық функцияларымен табылған өлшемсіз максималды майысудың мәндері беріледі, ал сурет 4.2.4 биіктік пен ұзындық қатынасы бойынша өзгеру мәндері график түрінде келтіріледі. Жұқа пластина үшін айырмашылық 1-5% болатынын көреміз.

4.3 Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаны ақырлы элементтер әдісімен есептеу

4.3.1 Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі серпімді бекітілген пластинаны есептеу

Серпімділі тіректі төртбұрышты пластинаны қарастырайық. Пластинаның ортасына шоғырланған P күші әсер етсін деп алайық. Берілген пластина симметриялы болғандықтан, оның ширек бөлігін қарастырамыз (сурет 4.3.1). Осы бөлікті 4×4 тормен жабамыз да, квадраттық жағдайда кадамды $\lambda = \frac{1}{8}$ түрінде аламыз.[\[54\]](#)



Сурет 4.3.1 Есептеу сызбасы

Осы есепті келесі үш жағдайда зерттейік:

- 1) Пластинаға шоғырланған күш әсер етеді, серпімділі қатаң қабырғалар ескерілмейді $\varphi = 0$, $\psi = 0$ және көлденең ығысуды параметрі $G = 0$.
- 2) Пластинаға таралған жүктеме әсер етеді, серпімділі қатаң қабырғалар ескеріледі $\varphi = 0.2$, $\psi = 0.2$ және көлденең ығысу параметрі $G = 0$.
- 3) Пластинаға шоғырланған күш әсер етеді, серпімділі қатаң қабырғалары бар $\varphi = 0$, $\psi = 0$ және көлденең ығысу параметрі $G = 1.14$.

Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі серпімді тіректі пластинаның деформациялық күйін зерттеп, нәтижесін алу үшін ақырлы элементтер әдісін қолданып бағдарлама құрылды. Бағдарламаның нәтижелері 4.3.1-4.3.16 кестелер мен 4.3.2-4.3.4 эпюралар түрінде көрсетілді.

Кесте 4.3.1 – Түйіндік тік жылжулар (W)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0	0,006325	0,011628	0,015137	0,016328
6	0,006337	0,011735	0,016502	0,019741	0,020946
11	0,011634	0,016503	0,021057	0,024373	0,025597
16	0,015124	0,019784	0,024373	0,028004	0,029493
21	0,016325	0,020944	0,025595	0,029496	0,031426

Кесте 4.3.2 – Түйіндік бұрылу бұрышы (α)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,051922	0,047837	0,036039	0,019153	0
6	0,043257	0,041882	0,033224	0,018390	0
11	0,037834	0,038836	0,032727	0,019132	0
16	0,035441	0,038042	0,034243	0,022242	0
21	0,035014	0,038071	0,035342	0,025874	0

Кесте 4.3.3 – Түйіндік бұрылу бұрышы (β)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,051911	0,043234	0,037857	0,035424	0,035013
6	0,047824	0,041892	0,038832	0,038041	0,038068
11	0,036037	0,033223	0,032723	0,034242	0,035336
16	0,019163	0,018374	0,019132	0,022247	0,025892
21	0	0	0	0	0

Кесте 4.3.4 – Түйіндік тік реакциялар (R)

Түйін	1	2	3	4	5
1	-0,151121	-0,003163	-0,005815	-0,007564	-0,016321
6	-0,003162	0	-0,000003	-0,000001	-0,000001
11	-0,005820	0	0,000003	0,000002	-0,000002
16	-0,007523	0	0	0	0,000002
21	-0,016324	0,000001	-0,000002	-0,000001	0,249999

Кесте 4.3.5 – Түйіндік бұралу моменті (M_{xy})

Түйін	1	2	3	4	5
1	-0,110331	-0,079361	-0,041925	-0,013855	-0,002154
6	-0,079335	-0,050594	-0,019452	-0,001284	-0,000972
11	-0,041932	-0,019461	0,007514	0,021149	-0,001872
16	-0,013852	-0,001284	0,021161	0,047046	0,009394
21	-0,002157	-0,000978	-0,001877	0,009398	-0,039987

Кесте 4.3.6–Түйіндік иілу моменті (M_x)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,008291	-0,065562	-0,108354	-0,138049	-0,140256
6	-0,002395	-0,052941	-0,103556	-0,140318	-0,153822
11	-0,000312	-0,048453	-0,102566	-0,156543	-0,179863
16	-0,001232	-0,044425	-0,098453	-0,180825	-0,242863
21	-0,000351	-0,043836	-0,097347	-0,158458	-0,425867

Кесте 4.3.7– Түйіндік иілу моменті (M_y)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,008281	-0,002395	-0,000359	-0,001263	-0,000385
6	-0,065565	-0,052931	-0,048492	-0,044419	-0,043831
11	-0,108353	-0,103554	-0,102565	-0,098459	-0,097346
16	-0,138015	-0,140354	-0,156543	-0,180862	-0,158436
21	-0,140231	-0,153849	-0,179857	-0,242854	-0,425852

Кесте 4.3.8– Түйіндік көлденең күш (Q_x)

Түйін	1	2	3	4	5
1	-0,524061	-0,384591	-0,206651	-0,082736	-0,002791
6	-0,231416	-0,257295	-0,242907	-0,141581	-0,080523
11	-0,269323	-0,299062	-0,313713	-0,213533	-0,128473
16	-0,279774	-0,362568	-0,549352	-0,440101	-0,226826
21	-0,346368	-0,406515	-0,635664	-1,817514	-2,830362

Кесте 4.3.9 –Түйіндік көлденең күш (Q_y)

Түйін	1	2	3	4	5
1	-0,524086	-0,231430	-0,269261	-0,279752	-0,346288
6	-0,384579	-0,257337	-0,299049	-0,362566	-0,406475
11	-0,206661	-0,242913	-0,313651	-0,549354	-0,635679
16	-0,082719	-0,141567	-0,213522	-0,440045	-1,817511
21	0,002831	-0,080523	-0,128521	-0,226792	-2,830312

Кестелер бойынша мынандай тұжырымдарды жасауға болады:

- үлкен тік жылжу 25 түйінде (кесте 4.3.1) пайда болады

$$W_{\max}^{25} = 0,031426 \frac{Pa^3}{D};$$

- горизонталь бағыттағы үлкен бұрыштық жылжу 1 түйінде (кесте 4.3.2) пайда болады $\alpha_{\max}^1 = 0,051912 \frac{Pa^2}{D};$

- вертикаль бағыттағы үлкен бұрыштық жылжу 1 түйінде (кесте 4.3.3) пайда болады $\beta_{\max}^1 = 0,051910 \frac{Pa^2}{D}$;

- үлкен тік реакция 25 түйінде (кесте 4.3.4) пайда болады $R_{\max}^{25} = 0,249999 P$;

- үлкен бұралу моменті 1 түйінде (кесте 4.3.5) пайда болады $M_{xy(\max)}^1 = -0,110333 Pa$;

- горизонталь бағыттағы үлкен иілу моменті 25 түйінде (кесте 4.3.6) пайда болады $M_{x(\max)}^{25} = -0,425857 Pa$;

- вертикаль бағыттағы үлкен иілу моменті 25 түйінде (кесте 4.3.7) пайда болады $M_{y(\max)}^{25} = -0,425853 Pa$;

- горизонталь бағыттағы үлкен көлденең күш 25 түйінде (кесте 4.3.8) пайда болады $Q_{x(\max)}^{25} = -2,830361 P$;

- вертикаль бағыттағы үлкен көлденең күш 25 түйінде (кесте 4.3.9) пайда болады $Q_{y(\max)}^{25} = -2,830310 P$;

Екінші жағдай бойынша, осы есептің 21-25, 5-25 қималарында (сурет 4.3.1) серпімділі қатаң қабырғаларды ескеріп $\varphi = 0,2$, $\psi = 0,2$, пластинаға таралған жүктеме әсер еткендегі және көлденең ығысуды ескермегендегі $G = 0$ шешімін аламыз.

Бұл жағдайда анықталған негізгі параметрлердің үлкен мәндері тең болады:

- үлкен тік жылжу 25 түйінде $W_{\max}^{25} = 0,016812 \frac{qa^4}{D}$;

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен бұрыштық жылжулар 1 түйінде $\alpha_{\max}^1 = 0,039222 \frac{qa^3}{D}$, $\beta_{\max}^1 = 0,039222 \frac{qa^2}{D}$;

- үлкен тік реакция 1 түйінде $R_{\max}^1 = -0,172017 qa$;

- үлкен бұралу моменті 1 түйінде пайда болады $M_{xy(\max)}^1 = -0,139023 qa$;

- горизонталь бағыттағы үлкен иілу моменті 5 түйінде $M_{x(\max)}^5 = -0,120696 qa^2$ және вертикаль бағыттағы үлкен иілу моменті 21 түйінде пайда болады $M_{y(\max)}^{21} = -0,120694 qa^2$;

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен көлденең күш 1 түйінде пайда болады $Q_{x(\max)}^1 = -0,434906 qa$, $Q_{y(\max)}^1 = -0,434909 qa$.

Бірінші және екінші жағдайдағы алынған шешімдерді бір-бірімен салыстыра отырып, пластинада серпімділі қатаң қабырға болған жағдайдағы мәндердің кіші болатынын көреміз.

Үшінші жағдай пластинаға шоғырланған күш әсер еткендегі, серпімділі қатаң қабырғалар болмаған $\varphi = 0$, $\psi = 0$ кездегі және көлденең ығысуды ескергендегі $G = 1,14$ шешімін аламыз.

Кесте 4.3.10 – Түйіндік тік жылжулар (W)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0	0,006952	0,012925	0,017144	0,018895
6	0,006955	0,013074	0,018471	0,022521	0,024382
11	0,012903	0,018473	0,023755	0,027903	0,000057
16	0,017105	0,022520	0,027952	0,032416	0,035145
21	0,018895	0,024387	0,030087	0,035145	0,038661

Кесте 4.3.11 – Түйіндік бұрылу бұрышы (α)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,049296	0,045753	0,035051	0,019216	0
6	0,041469	0,040116	0,032196	0,018394	0
11	0,036775	0,037420	0,031306	0,018594	0
16	0,035061	0,037255	0,032731	0,020384	0
21	0,035452	0,038916	0,036442	0,026056	0

Кесте 4.3.12 – Түйіндік бұрылу бұрышы (β)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,049892	0,041410	0,036777	0,035080	0,035469
6	0,045733	0,040151	0,037461	0,037252	0,038908
11	0,035092	0,032193	0,031317	0,032731	0,036454
16	0,019218	0,018393	0,018593	0,020381	0,026068
21	0	0	0	0	0

Кесте 4.3.13 – Түйіндік бұралу моменті (M_{xy})

Түйін	1	2	3	4	5
1	-0,097572	-0,071314	-0,038588	-0,012697	-0,002079
6	-0,071317	-0,047113	-0,020872	-0,002066	0,002346
11	-0,038583	-0,020872	-0,002934	0,009898	0,002818
16	-0,012694	-0,002054	0,009897	0,031689	0,002017
21	-0,002081	0,002337	0,002818	0,002018	-0,071527

Кесте 4.3.14 – Түйіндік иілу моменті (M_x)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,009465	-0,059591	-0,101126	-0,134627	-0,136412
6	-0,001428	-0,049699	-0,097047	-0,136115	-0,152222
11	-0,000632	-0,048349	-0,099658	-0,150956	-0,173883
16	-0,000624	-0,046094	-0,100825	-0,175493	-0,230642
21	-0,004097	-0,040333	-0,094116	-0,158443	-0,430555

Кесте 4.3.15 – Түйіндік иілу моменті (M_y)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,009462	-0,001423	-0,000632	-0,000626	-0,004091
6	-0,059592	-0,049700	-0,048348	-0,046092	-0,040333
11	-0,101127	-0,097021	-0,099693	-0,100835	-0,094136
16	-0,134671	-0,136121	-0,150984	-0,175494	-0,158442
21	-0,136412	-0,152235	-0,173886	-0,230674	-0,430510

Кесте 4.3.16 – Түйіндік көлденең күш (Q_x)

Түйін	1	2	3	4	5
1	-11,854778	-11,303441	-10,263144	-8,613457	-7,452734
6	-11,268552	-11,056610	-10,574780	-9,435701	-8,566509
11	-10,865111	-11,107020	-11,634830	-11,879450	-11,838215
16	-10,407951	-11,018840	-12,576672	-15,135293	-16,746980
21	-10,432080	-11,425980	-14,043641	-19,403737	-23,140090

Осы кестелер бойынша мынандай тұжырымдарды жасауға болады:

- үлкен тік жылжу 25 түйінде (кесте 4.3.10) пайда болады

$$W_{\max}^{25} = 0,038681 \frac{Pa^3}{D};$$

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен бұрыштық жылжулар 1 түйінде $\alpha_{\max}^1 = 0,049291 \frac{Pa^2}{D}$ (кесте 12), $\beta_{\max}^1 = 0,049292 \frac{Pa^2}{D}$; (кесте 4.3.11) пайда болады;

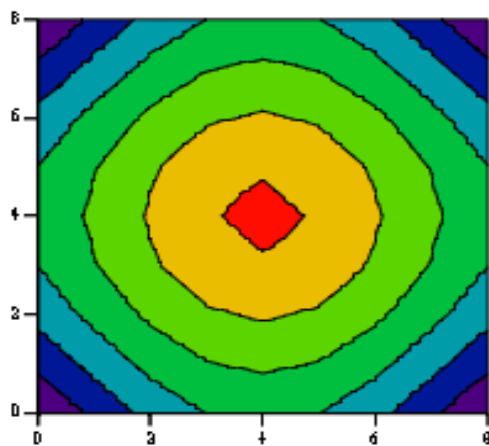
- үлкен бұралу моменті 1 түйінде (кесте 4.3.13) пайда болады $M_{xy(\max)}^1 = -0,097573 Pa$;

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен иілу моменті 25 түйінде $M_{x(\max)}^{25} = -0,430555 Pa$ (кесте 4.3.14) және $M_{y(\max)}^{25} = -0,430560 Pa$ (кесте 4.3.15) пайда болады;

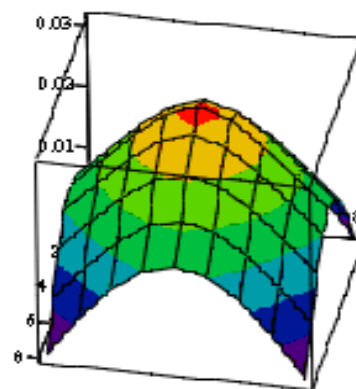
- горизонталь бағыттағы үлкен көлденең күш 25 түйінде (кесте 4.3.16) пайда болады $Q_{x(\max)}^{25} = -23,140090 P$.

Нәтижесінде алдыңғы екі жағдай мен көлденең ығысуды ескергендегіні салыстырып, майысу функциясының өсетінін көреміз.

Енді осы үш жағдайды Mathcad программасында толық пластинаға салып, майысу функциясын график түрінде көрсетейік:



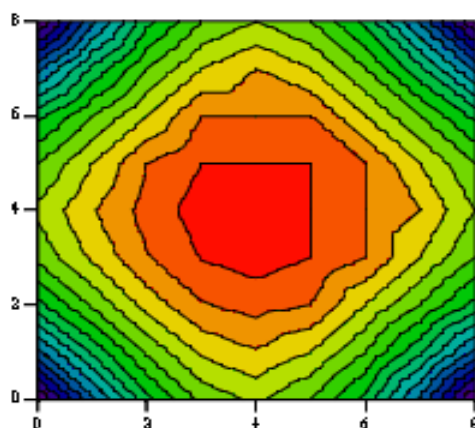
а



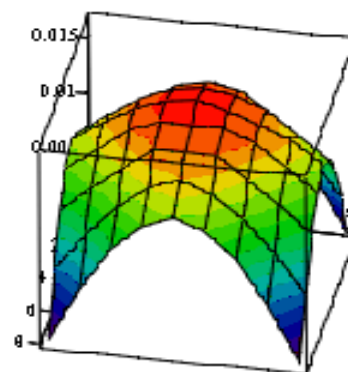
б

а – изолиния, б – эпюра

Сурет 4.3.2 Бірінші жағдайдағы майысу функциясы W



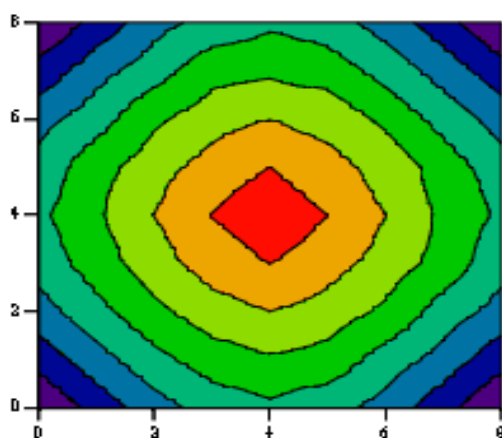
а



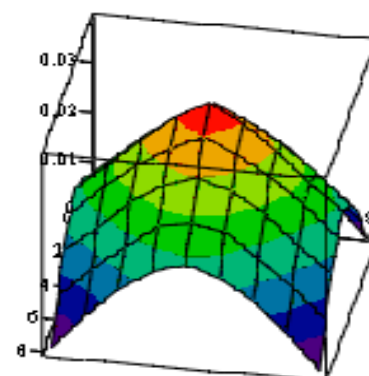
б

а – изолиния, б – эпюра

Сурет 4.3.3. Екінші жағдайдағы майысу функциясы W



а



б

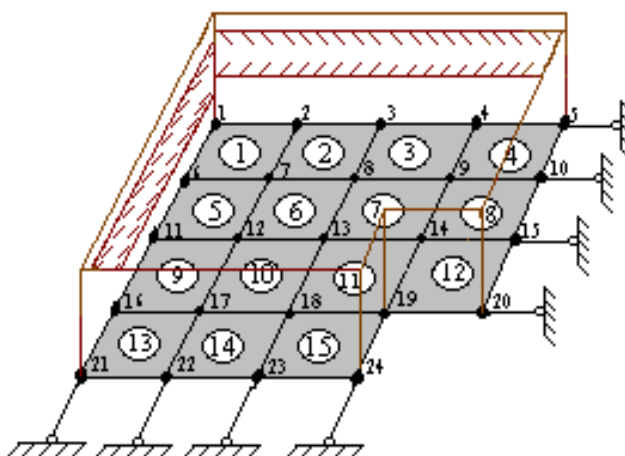
а – изолиния; б – эпюра

Сурет 4.3.4. Үшінші жағдайдағы майысу функциясы W

Алынған нәтижелер арқылы көлденең ығысу деформациясын ескергендегі серпімді тіректі төртбұрышты пластинаның иілу есебінің шешімі толық түрде анықталады. Сонымен қатар, сандық нәтижелерін қолдану арқылы түйіндік бұрылу бұрыштары мен ішкі күштерінің эпюраларын тұрғызуға болады.

4.3.2 Тесік ақауы бар пластинаны ақырлы элементтер әдісімен есептеу

Тесікті төртбұрышты пластинаны қарастырайық. Пластинаның ортасына (яғни, 19 түйінге) шоғырланған күш P әсер етсін. Пластинаның симметриясын ескере отырып, оның ширек бөлігін қарастырамыз (сурет 4.3.5). Ширек бөлігін 4×4 тормен жабамыз да, квадраттық жағдайда қадамды $\lambda = \frac{1}{8}$ түрінде аламыз.



Сурет 4.3.5 - Есептеу схемасы

Бұл есептіде үш жағдайда зерттеп, алынған нәтижелерді 4.3.17 - 4.3.26 кестелер және 4.3.6-4.3.7 суреттегі эпюралар түрінде көрсетеміз.

Кесте 4.3.17 –Түйіндік тік жылжулар (w)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
6	0	0,000472	0,001675	0,002822	0,003282
11	0	0,001675	0,005511	0,009246	0,010653
16	0	0,002823	0,009246	0,016798	0,019713
21	0	0,003285	0,010653	0,019713	Тесік бар

Кесте 4.3.18 –Түйіндік бұрылу бұрышы (α)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
6	0	0,007518	0,010586	0,007185	0
11	0	0,024452	0,033774	0,021845	0
16	0	0,040546	0,059869	0,053113	0
21	0	0,046894	0,067276	0,081531	Тесік бар

Кесте 4.3.19 –Түйіндік бұрылу бұрышы (β)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
6	0	0,007521	0,024454	0,040556	0,046897
11	0	0,010584	0,033771	0,059867	0,067277
16	0	0,007175	0,021848	0,053132	0,081531
21	0	0	0	0	Тесік бар

Кесте 4.3.20 –Түйіндік тік реакциялар (R)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,060184	0,034807	-0,057781	-0,148923	-0,186284
6	0,034817	0	0	0	0
11	-0,057781	0	0	-0,000001	0
16	-0,148922	0	0	0,333344	0,000001
21	-0,186287	0	-0,000001	0,000001	Тесік бар

Кесте 4.3.21 –Түйіндік бұралу моменті (M_{xy})

Түйін	1	2	3	4	5
1	-0,042191	0,009262	0,013218	0,008235	-0,041454
6	0,009264	0,150672	0,204483	0,132657	0,008068
11	0,013248	0,204485	0,291594	0,246726	-0,026418
16	0,008235	0,132657	0,246786	0,475921	0,183833
21	-0,041445	0,008065	-0,026417	0,183835	Тесік бар

Кесте 4.3.22 –Түйіндік иілу моменті (M_x)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0	0,018110	0,075598	0,130483	0,153330
6	0,060367	0,072978	0,034707	0,016950	0,010794
11	0,251992	0,140334	0,006946	-0,144225	-0,176143
16	0,434943	0,198428	0,062413	-0,463172	-0,202520
21	0,511094	0,226538	-0,010564	0,130092	Тесік бар

Кесте 4.3.23 –Түйіндік иілу моменті (M_y)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0	0,060364	0,251992	0,434946	0,511097
6	0,018110	0,072977	0,140331	0,198423	0,226534
11	0,075598	0,034707	0,006944	0,062412	-0,010582
16	0,130481	0,016950	-0,144226	-0,463172	0,130091
21	0,153330	0,010792	-0,176143	-0,202520	Тесік бар

Кесте 4.3.24 –Түйіндік көлденең күш (Q_x)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,482932	1,007973	1,498306	1,036421	0,609245
6	0,446795	0,348095	0,288953	0,252609	0,176651
11	-0,966640	-1,003283	-0,902955	-0,784103	-0,802213
16	-2,142227	-2,051925	-3,423515	-1,200941	6,167854
21	-2,677257	-2,555297	-0,752518	0,928304	Тесік бар

Кесте 4.3.25 –Түйіндік көлденең күш (Q_y)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,482924	0,446795	-0,966647	-2,142214	-2,677255
6	1,007986	0,348097	-1,003281	-2,051914	-2,555348
11	1,498348	0,288984	-0,902964	-3,423506	-0,752545
16	1,036424	0,252604	-0,784104	-1,200984	0,928315
21	0,609241	0,176644	-0,802198	6,167834	Тесік бар

Кесте 4.3.26 –Түйіндік ығысудағы майысу ($\tilde{W}$)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0	0,060362	0,251992	0,434941	0,511098
6	0,060367	0,112272	0,134637	0,165672	0,182564
11	0,251995	0,134644	0,010645	-0,062930	-0,143611
16	0,434945	0,165671	-0,062942	-0,712572	-0,055712
21	0,511097	0,182567	-0,143611	-0,055712	Тесік бар

Осы кестелер бойынша мынандай тұжырымдарды жасауға болады:

- үлкен тік жылжу 20 және 24 түйіндерде болады (кесте 4.3.17)

$$W_{\max}^{20} = W_{\max}^{24} = 0,019703 \frac{Pa^3}{D};$$

- горизонталь бағыттағы үлкен бұрыштық жылжу 24 түйінде (кесте 4.3.18) $\alpha_{\max}^{24} = 0,081532 \frac{Pa^2}{D}$ және вертикаль бағыттағы үлкен бұрыштық

жылжу 20 түйінде (кесте 4.3.19) пайда болады $\beta_{\max}^{20} = 0,081532 \frac{Pa^2}{D};$

- үлкен тік реакция 19 түйінде (кесте 4.3.20) пайда болады $R_{\max}^{19} = 0,333334 P$;

- үлкен бұралу моменті 19 түйінде (кесте 4.3.21) пайда болады $M_{xy(\max)}^{19} = 0,475901 Pa$;

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен иілу моменттері сәйкесінше 21 түйінде (кесте 4.3.22) $M_{x(\max)}^{21} = 0,511099 Pa$ және 5 түйінде (кесте 23) $M_{y(\max)}^5 = 0,511099 Pa$ пайда болады;

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен көлденең күштер сәйкесінше 20 түйінде (кесте 4.3.24) $Q_{x(\max)}^{20} = 6,167853 P$ және 24 түйінде (кесте 4.3.25) $Q_{y(\max)}^{24} = 6,167836 P$; пайда болады;

- ығысудағы үлкен майысу 5 және 21 түйіндерде (кесте 4.3.26) пайда болады $\tilde{W}_{\max}^5 = \tilde{W}_{\max}^{21} = 0,511099 \frac{D}{\mu GF} Pa$.

Енді осы есепті екінші жағдай бойынша 21-24, 24-19, 19-20, 5-20 кималарында (сурет 4.3.5) серпімділі қатаң қабырғалар орналасқанда $\varphi = 0,2$, $\psi = 0,2$, көлденең ығысуды ескермегендегі $G = 0$. және пластинаға таралған жүктеме әсер еткендегі шешімін аламыз.

Бұл жағдайда негізгі параметрлердің үлкен мәндері тең болады:

- үлкен тік жылжу 20 түйінде пайда болады $w_{\max}^{20} = 0,000602 \frac{qa^4}{D}$;

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен бұрыштық жылжулар сәйкесінше 18 түйінде $\alpha_{\max}^{18} = 0,001777 \frac{qa^3}{D}$ және 15 түйінде $\beta_{\max}^{15} = 0,001940 \frac{qa^2}{D}$ болады;

- үлкен тік реакция 19 түйінде пайда болады $R_{\max}^{19} = 0,012573 qa$;

- үлкен бұралу моменті 9 түйінде пайда болады $M_{xy(\max)}^9 = 0,009407 qa$;

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен иілу моменттері, сәйкесінше 16 түйінде $M_{x(\max)}^{16} = 0,0239476 qa^2$ және 4 түйінде $M_{y(\max)}^4 = 0,025533 qa^2$ болады.

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен көлденең күштер, сәйкесінше 11 түйінде $Q_{x(\max)}^{11} = -0,190134 qa$ және 24 түйінде $Q_{y(\max)}^{24} = 0,267539 qa$ пайда болады.

- ығысудағы үлкен майысу 19 түйінде пайда болады $\tilde{W}_{\max}^{19} = -0,028693 \frac{D}{\mu_0 GF} qa^2$.

Үшінші жағдай пластинаға таралған жүктеме әсер еткендегі, серпімділі қатаң қабырға орналасқан $\varphi = 0,2$, $\psi = 0,2$ жағдайдағы және көлденең ығысуды ескергендегі $G = 1,14$ шешімін аламыз.

Алынған нәтижелерді 4.3.27-4.3.34 кестелер түрінде көрсетеміз:

Кесте 4.3.27 –Түйіндік тік жылжулар (W)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
6	0	0,000131	0,000222	0,000247	0,000176
11	0	0,000226	0,000432	0,000536	0,000491
16	0	0,000254	0,000534	0,000735	0,000782
21	0	0,000162	0,000443	0,000695	Тесік бар

Кесте 4.3.28 –Түйіндік бұрылу бұрышы (α)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
6	0	0,000553	0,000322	-0,000093	0
11	0	0,001094	0,000925	0,000281	0
16	0	0,001606	0,001694	0,000763	0
21	0	0,001992	0,002162	0,001902	Тесік бар

Кесте 4.3.29 –Түйіндік бұрылу бұрышы (β)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
6	0	0,000556	0,001087	0,001582	0,002194
11	0	0,000325	0,000901	0,001667	0,002452
16	0	-0,000102	0,000233	0,000714	0,002203
21	0	0	0	0	0

Кесте 4.3.30 –Түйіндік бұралу моменті (M_{xy})

Түйін	1	2	3	4	5
1	-0,011824	-0,004031	-0,001535	0,001171	0,006128
6	-0,004022	0,002513	0,004030	0,006521	0,008924
11	-0,001612	0,004059	0,006815	0,006914	0,003862
16	0,001674	0,006031	0,006482	0,009837	0,008643
21	0,007563	0,008450	0,003241	0,008185	Тесік бар

Кесте 4.3.31 –Түйіндік иілу моменті (M_x)

Түйін	1	2	3	4	5
1	-0,021802	0,008115	0,008881	0,013638	-0,011944
6	0,011681	-0,000953	-0,003585	-0,002822	0,011304
11	0,020173	-0,000127	-0,007174	-0,008432	0,004585
16	0,027541	0,002994	-0,005553	-0,011524	-0,015003
21	-0,006601	0,014540	0,001713	0,004954	Тесік бар

Кесте 4.3.32 –Түйіндік иілу моменті (M_y)

Түйін	1	2	3	4	5
1	-0,021750	0,011753	0,020051	0,026781	-0,003861
6	0,007991	-0,000978	-0,000164	0,003324	0,015172
11	0,008881	-0,003618	-0,007215	-0,005844	0,002143
16	0,015092	-0,002705	-0,008402	-0,013878	0,002744
21	-0,015047	0,010784	0,004903	-0,005650	Тесік бар

Кесте 4.3.33 –Түйіндік көлденең күш (Q_x)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,065381	0,092334	0,055395	-0,053395	-0,098281
6	-1,176932	-0,834606	-0,263083	0,658165	0,750204
11	-1,878853	-1,393404	-0,601871	0,215031	0,725854
16	-1,776343	-1,365742	-0,736743	-0,197652	0,443718
21	-0,546888	-0,441974	-0,289339	-0,241565	Тесік бар

Кесте 4.3.34 –Түйіндік көлденең күш (Q_y)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,066222	-1,176152	-1,872191	-1,748035	-0,607461
6	0,092522	-0,842123	-1,407840	-1,360042	-0,528083
11	0,053371	-0,282135	-0,638923	-0,738807	-0,416230
16	-0,045512	0,444972	0,451215	0,091056	-0,383767
21	-0,078932	0,946101	1,236852	1,284295	Тесік бар

Бұл жағдайда негізгі параметрлердің үлкен мәндері тең болады:

- үлкен тік жылжу 20 түйінде (кесте 4.3.27) пайда болады

$$W_{\max}^{20} = 0,000782 \frac{Pa^3}{D};$$

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен бұрыштық жылжулар, сәйкесінше 23 түйінде (кесте 4.3.28) $\alpha_{\max}^{23} = 0,002161 \frac{Pa^2}{D}$ және 15 түйінде

(кесте 29) $\beta_{\max}^{15} = 0,002457 \frac{Pa^2}{D}$ пайда болады;

- үлкен бұралу моменті 1 түйінде (кесте 4.3.30) пайда болады

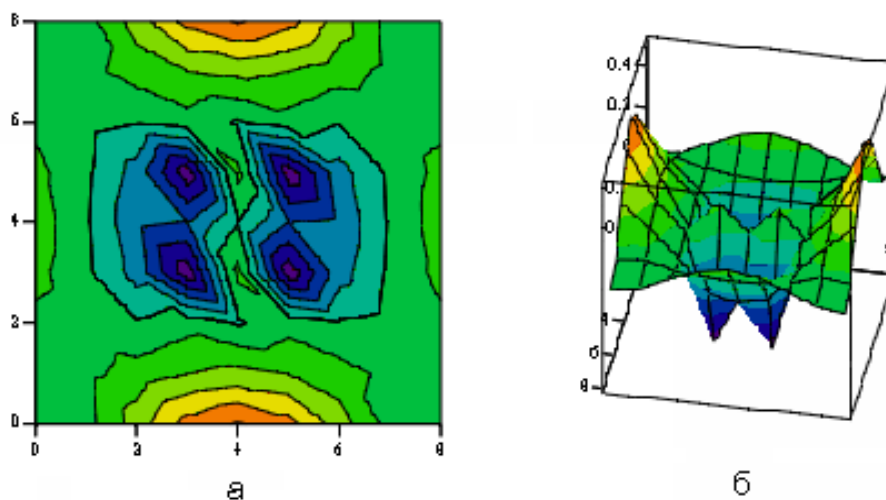
$$M_{xy(\max)}^1 = -0,011814 Pa;$$

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен иілу моменттері, сәйкесінше 16 түйінде $M_{y(\max)}^4 = 0,026781 Pa$ (кесте 4.3.31) және 4 түйінде

$$M_{x(\max)}^{16} = 0,027542 Pa \text{ (кесте 4.3.32) болады.}$$

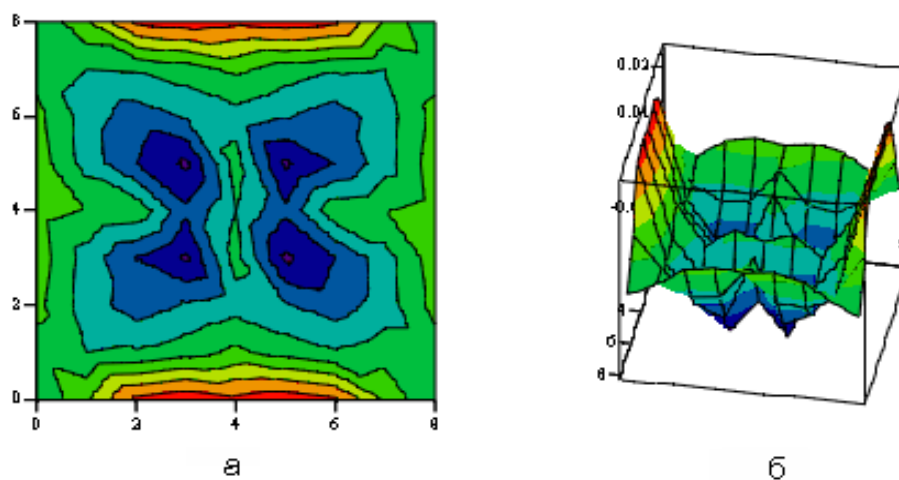
- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен көлденең күштер, сәйкесінше 11 түйінде $Q_{x(\max)}^{11} = -1,878856 P$ (кесте 4.3.33) және 3 түйінде $Q_{y(\max)}^3 = -1,872190 P$ (кесте 4.3.34) пайда болады.

Қарастырылған үш жағдайды Mathcad программасында толық пластина ретінде салып, иілу моментінің эпюралар түрінде көрсетейік:



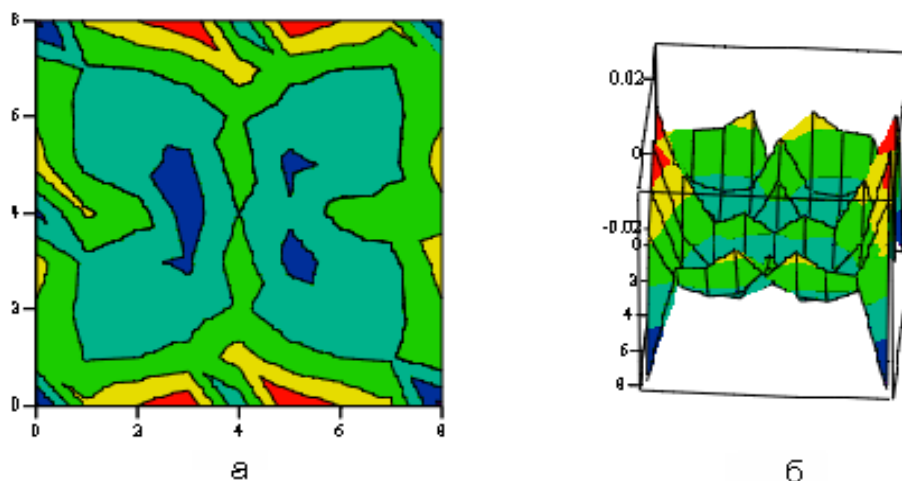
а – изолиния; б – эпюра

Сурет 4.3.6 – Бірінші жағдайдағы иілу моменті



а – изолиния; б – эпюра

Сурет 4.3.7 – Екінші жағдайдағы иілу моменті



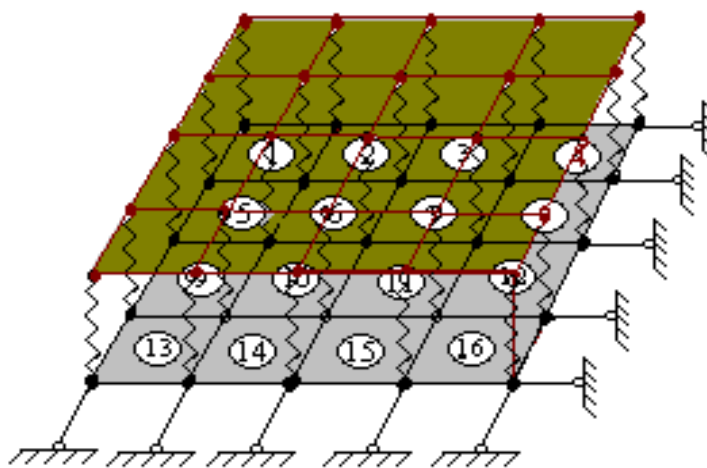
а – изолиния; б – эпюра

Сурет 4.3.8 – Үшінші жағдайдағы иілу моменті

Сонымен, көлденең ығысу деформациясын ескергендегі тесік ақауы бар пластинаның иілу есебінің шешімі толық түрде анықталады. Сонымен қатар, программа арқылы табылған нәтижелерді қолдану арқылы майысу функциясы, түйіндік бұрылу бұрыштары мен ішкі күштерінің эпюраларын тұрғызуға болады.

4.3.3 Серпімділі негіздегі пластинаны ақырлы элементтер әдісімен есептеу

Серпімділі негіздегі пластинаны қарастырайық. Осы пластинаның ортасына шоғырланған күш P әсер етсін. Пластинаның симметриясын ескере отырып, оның ширек бөлігін қарастырамыз (сурет 4.3.9). Осы бөлікті 4x4 тормен жабамыз да, квадраттық жағдайда қадамды $\lambda = \frac{1}{8}$ түрінде аламыз. [55, 56, 57]



Сурет 4.3.9 - Есептеу схемасы

Қарастырылып отырған пластинаны есептеу үшін құрылған программаға бірінші жағдай бойынша бастапқы берілгендерін былайша енгіземіз:

Parameter (N=16,LS=75,JC=25,JT=10,IP=1,JZ=25,NG=16,MU=1,LR=8)

DATA RM/0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,
 *1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,
 *0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,
 *0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0./,
 ***IM**/1,2,7,6,2,3,8,7,3,4,9,8,4,5,10,9,6,7,12,11,7,8,13,12,8,9,14,13,9,10,15,14,
 *11,12,17,16,12,13,18,17,13,14,19,18,14,15,20,19,16,17,22,21,17,18,23,22,
 *18,19,24,23,19,20,25,24/, **RC**/0.25,.5,.5,.5,0.25,.5,1.,1.,1.,.5,.5,1.,1.,1.,.5,.5,
 *1.,1.,1.,.5,0.25,.5,.5,.5,0.25/, **IC**/1,4,7,10,13,16,19,22,25,28,31,34,37,40,43,
 *46,49,52,55,58,61,64,67,70,73/, **IK**/14,29,44,59,74,75,72,69,66,63/, **KP**/73/,
 ***PC**/0.25/,**PZ**/1.,2.,2.,2.,1.,2.,4.,4.,4.,2.,2.,4.,4.,4.,2.,2.,4.,4.,4.,2.,1.,2.,2.,2.,1./,
 ***KM**/1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16/, **IMR**/21,22,0,22,23,0,23,24,0,
 *24,25,0,5,10,1,10,15,1,15,20,1,20,25,1/, **RMR**/0.125,0.,0.,0.125,0.,0.,0.125,
 *0.,0.,0.125,0.,0.,0.125,0.,0.,0.125,0.,0.,0.125,0.,0.,0.125,0.,0./

Программа бойынша алынған нәтижелерді 4.3.35-4.3.44 кестелер түрінде көрсетейік:

Кесте 4.3.35 –Түйіндік тік жылжулар (W)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,009384	0,011016	0,012436	0,013467	0,013834
6	0,011015	0,012730	0,014333	0,015508	0,015945
11	0,012452	0,0014334	0,016193	0,017675	0,018252
16	0,013466	0,015504	0,017674	0,019625	0,020511
21	0,013833	0,015941	0,018252	0,020526	0,021861

Кесте 4.3.36 –Түйіндік бұрылу бұрышы (α)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,013234	0,012565	0,010153	0,005762	0
6	0,013772	0,013581	0,011514	0,006761	0
11	0,014647	0,015251	0,014021	0,008872	0
16	0,015527	0,017032	0,017234	0,012814	0
21	0,015893	0,017803	0,018881	0,016734	0

Кесте 4.3.37 –Түйіндік бұрылу бұрышы (β)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,013234	0,013775	0,014645	0,015523	0,015896
6	0,012565	0,013585	0,015257	0,017031	0,017807
11	0,0101521	0,011514	0,014009	0,017233	0,018886
16	0,005763	0,006762	0,008878	0,012811	0,016733
21	0	0	0	0	0

Кесте 4.3.38 –Түйіндік тік реакциялар (R)

Түйін	1	2	3	4	5
1	-0,002341	-0,002753	-0,003134	-0,003352	-0,003481
6	-0,002752	-0,003189	-0,003583	-0,003835	-0,003933
11	-0,003122	-0,003587	-0,004040	-0,004407	-0,004560
16	-0,003338	-0,003875	-0,004412	-0,004906	-0,005127
21	-0,003453	-0,003984	-0,004560	-0,005120	0,244530

Кесте 4.3.39 –Түйіндік бұралу моменті (M_{xy})

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,003742	0,008125	0,010902	0,008098	-0,001891
6	0,008120	0,015100	0,021013	0,016523	-0,000781
11	0,010947	0,021013	0,033738	0,033484	-0,001793
16	0,008102	0,016525	0,033484	0,053162	0,009386
21	-0,001860	-0,000773	-0,000733	0,009383	-0,041520

Кесте 4.3.40 –Түйіндік иілу моменті (M_x)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,001174	-0,010658	-0,024902	-0,038930	-0,044869
6	0,000064	-0,008683	-0,026260	-0,045616	-0,054141
11	0,000142	-0,006438	-0,028553	-0,063130	-0,080011
16	-0,000446	-0,002987	-0,025232	-0,087722	-0,148243
21	-0,000703	-0,001698	-0,024242	-0,065265	-0,325664

Кесте 4.3.41 –Түйіндік иілу моменті (M_y)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,001176	0,000066	0,000141	-0,000449	-0,000724
6	-0,010651	-0,008682	-0,006432	-0,002989	-0,001703
11	-0,024897	-0,026267	-0,028553	-0,025215	-0,024242
16	-0,038925	-0,045612	-0,063125	-0,087717	-0,065263
21	-0,044883	-0,054155	-0,079998	-0,142835	-0,325657

Кесте 4.3.42 –Түйіндік көлденең күш (Q_x)

Түйін	1	2	3	4	5
1	-0,078359	-0,079463	-0,080289	-0,056761	-0,033582
6	-0,042193	-0,068002	-0,094366	-0,068830	-0,042754
11	-0,051042	-0,101510	-0,167666	-0,136316	-0,089256
16	-0,056737	-0,156956	-0,394467	-0,358071	-0,184373
21	-0,059016	-0,168076	-0,479089	-1,733589	-2,786137

Кесте 4.3.43 –Түйіндік көлденең күш (Q_y)

Түйін	1	2	3	4	5
1	-0,078358	-0,042227	-0,051022	-0,056734	-0,059050
6	-0,079454	-0,068011	-0,101485	-0,156955	-0,168066
11	-0,080233	-0,094357	-0,167652	-0,394435	-0,479058
16	-0,056750	-0,068812	-0,136320	-0,358049	-1,733578
21	-0,033577	-0,042727	-0,089284	-0,184373	-2,786135

Кесте 4.3.44 –Түйіндік ығысудағы майысу ($\tilde{W}$)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,001824	-0,008143	-0,019043	-0,030295	-0,035075
6	-0,008143	-0,013364	-0,025152	-0,037374	-0,042965
11	-0,019042	-0,025157	-0,043931	-0,067964	-0,080183
16	-0,030281	-0,037375	-0,067963	-0,134955	-0,160074
21	-0,035071	-0,042959	-0,080184	-0,160074	-0,501014

Осы кестелер бойынша мынандай тұжырымдарды жасауға болады:

- үлкен тік жылжу 25 түйінде (кесте 4.3.35) пайда болады

$$W_{\max}^{25} = 0,021865 \frac{Pa^3}{D};$$

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен бұрыштық жылжулар, сәйкесінше 23 түйінде $\alpha_{\max}^{23} = 0,018883 \frac{Pa^2}{D}$ (кесте 4.3.36) және 15 түйінде

$$\beta_{\max}^{15} = 0,018882 \frac{Pa^2}{D} \text{ (кесте 4.3.37) пайда болады;}$$

- үлкен тік реакция 25 түйінде $R_{\max}^{25} = 0,244533 P$ (кесте 4.3.38) пайда болады;

- үлкен бұралу моменті 19 түйінде $M_{xy(\max)}^{19} = 0,053163 Pa$ (кесте 4.3.39) болады;

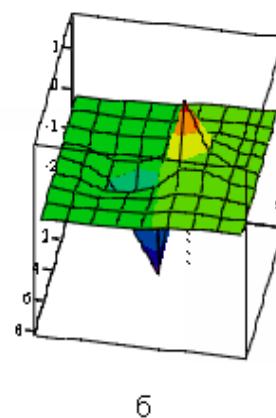
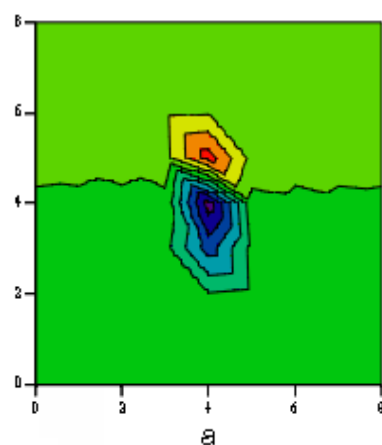
- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен иілу моменттері, 25 түйінде $M_{x(\max)}^{25} = -0,325662 Pa$ (кесте 4.3.40), $M_{y(\max)}^{25} = -0,325659 Pa$ (кесте 4.3.41) пайда болады;

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен көлденең күштер 25 түйінде $Q_{x(\max)}^{25} = -2,786139 P$ (кесте 42), $Q_{y(\max)}^{25} = -2,786137 P$ (кесте 4.3.43) пайда болады;

- ығысудағы үлкен майысу 25 түйінде $\tilde{W}_{\max}^{25} = -0,501016 \frac{D}{\mu GF} Pa$ (кесте 4.3.44) болады.

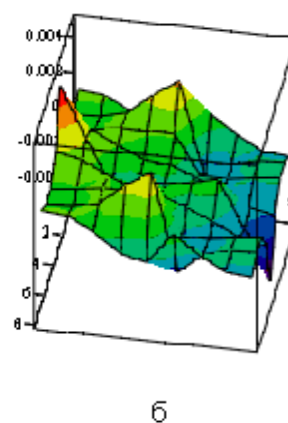
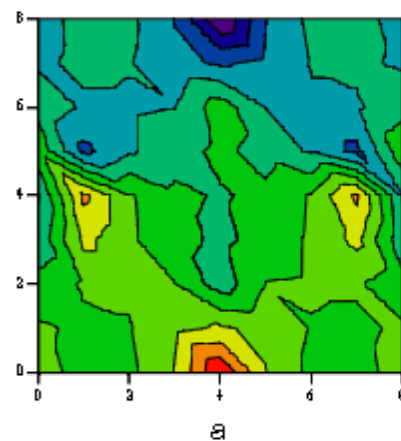
Алынған шешімдерді бір-бірімен салыстыратын болсақ, серпімділі қатаң қабырға болған жағдайдағы мәндердің кіші болатынын көреміз.

Бұл есептеде үш жағдайды пластинаның көлденең күштерін 4.3.10-4.3.11 суреттегі эпюралар түрінде көрсетейік:



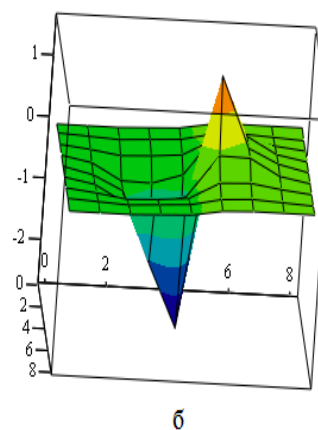
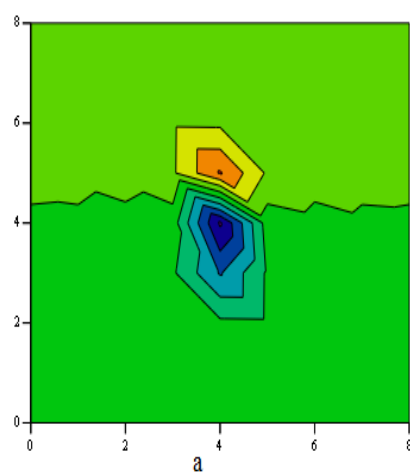
а – изолиния; б - эпюра

Сурет 4.3.10 – Бірінші жағдайдағы көлденең күш Q_x



а – изолиния; б - эпюра

Сурет 4.3.11 – Екінші жағдайдағы көлденең күш Q_x



а – изолиния; б - эпюра

Сурет 4.3.12 – Үшінші жағдайдағы көлденең күш

Сөйтіп, көлденең ығысу деформациясын ескергендегі серпімділі неіздегі пластинаның иілу есебінің шешімі толық түрде анықталады. Программа арқылы табылған нәтижелерді қолдану арқылы майысу функциясы, түйіндік бұрылу бұрыштары мен ішкі күштерінің эпюраларын тұрғызуға болады.

Ұсынылған модель мен ақырлы элементтер әдісі арқылы құрылған есептеу алгоритмдері күрделі пішінді, әртүрлі бекітілген пластиналар үшін жоғары дәлдікпен есептеулер жүргізуге мүмкіндік береді. Жетілдірілген теория негізінде жасалған модель мен әдістерді қазіргі заманғы механика және автоматтандырылған жобалау жүйелерінде пайдалануға толықтай жарамды деп санауға болады.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертация көлденең ығысу деформациясын ескергендегі изотропты жұқа пластинаны есептеудің дәлденген теориясына арналған аяқталған ғылыми зерттеу жұмыс болып табылады. Жұмыста :

1. Тақырып бойынша танымал зерттеулерге шолу жасалды. Рейсснер енгізген болжамдардан бастап Реддидің үшінші ретті ығысу теориясына дейінгі теориялардың негізгі тұжырымдары қарастырылды. Қазіргі уақытта пластиналардың жоғарғы ретті ығысу теориялары құрылғанына қарамастан іс жүзінде оларды пластинаны есептеу жолдарына қолдану күрделі болатындықтан белгілі дәлденген теорияларды қарапайымдату жолдарын зерттеу өзкелі мәселе болып тұр. Соңғы зерттеулердің ішінде Shimpri-дің жасаған жетілдірілген дәлденген теорияда шешуші теңдеу санын төмендетуге болатыны көрсетіліп кетті.

2. Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі дәлденген теорияның жетілдірілген нұсқасы бойынша тікбұрышты пластинаның математикалық моделі құрылды. Негізгі болжам ретінде көлденең ығысу деформациялары қалыңдық бойынша квадраттық заңдылық бойынша өзгеру болжамы алынды. Және де бұл деформация параметр ретінде қабылданды. Пластинаның цилиндрлік қатандығын көлденең ығысу деформация параметрімен байланыстырылды. Нәтижесінде негізгі шешуші теңдеуде бір белгісіз айнымалы ғана болады және ол классикалық теорияның шешуші теңдеудің формасына ие. Пластинаның дәлденген теориясының шешімін алу үшін классикалық теорияның әдебиеттерде белгілі шешімдерін қолдануға болады.

3. Құрылған жетілдірілген теория негізінде пластинаның есептеу әдісі құрылды. Оның негізінде айнымалыларды бөлу әдісі жатыр. Пластинаны горизантал және вертикал бағытта шексіз жолақ-арқалықтардан тұратын жүйе ретінде алып, арқалықтардың иілім функциялары анықталды. Пластина жақтары топсалы, қатты, серпімді бекіністерге ие және бос болғанда шекаралық шарттарды ескере отырып, арқалықтың иілім функциясының мүмкін болатын 10 нұсқасының шешімі жалпы түрде алынды. Бұл арқылы 55 түрлі бекітілген пластинаны есептеу мүмкіндігі бар. Осы әдістің тікбұрышты пластинаның есептеу алгоритм жасалды.

5. Геометриясы мен жүктемесі күрделі болатын пластиналарды ақырлы элементтер әдісі арқылы шеші үшін ұсынылған жетілдірілген теория мен әдісті қолдануға болады. Көлденең ығысуды параметр ретінде қолданатындықтан ақырлы элементті еркіндік дәрежесі 12 тең болып сақталады. Есептеу толық автоматтандырылды.

6. Ұсынылған жетілдірілген теория негізінде жасалған модель мен әдістерді қазіргі заманғы механика және автоматтандырылған жобалау жүйелерінде пайдалануға толықтай жарамды деп санауға болады.

ПАЙДАЛАНЫЛҖАН ӘДБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Todhunter I., Pearson K. History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials. N.-Y.: Dover, 1960. V.2. Pt. 1. 762 p.: Pt. 2. 546 p.
2. Timoshenko S.P. History of Strength of Materials. N.-Y.: Dover, 1983. 452 p.
3. Jemielita G. On the winding paths of elastic plates//Mechanika Teoretyczna I Stosowana. 1993. V.2. No 31. P. 317-327.
4. Kirchhoff GR. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. 19 1850;40:51-88.
5. Thomson W, Tait P. Treatise on Natural Philosophy. Cambridge: Cambridge University Press, 1883.
6. Love, A. E. H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., Dover Publ., New York, USA, 1944.
7. Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., 1959, Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.
8. Timoshenko, S. P. and Gere, J., 1961, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.
9. Timoshenko S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. Phil. Mag., 1921, vol. 41, 744—746.
10. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. J. of Math, and Phys., 1944, 23 (184—191).
11. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. Journal of Applied Mechanics 1945;12:69-72.
12. Mindlin RD. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. Journal of Applied Mechanics 1951;18:31-38.
13. Васильев В.В. О теории тонких пластин. // Изв. АН. МТТ. 1992.- №3.- С.26-47.
14. Васильев В.В. К дискуссии по классической теории пластин//Изв.АН.МТТ. -1995.-№4.-С.140-150.
15. Vasiliev V.V. Modern conceptions of plate theory. Composite Structures 48 (2000) 39±48
16. Wang, C.M., Lim, G.T., Reddy, J.N., Lee, K.H., 2001. Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories. Engineering Structures 23 (7), 838–849.
17. Salerno VL, Goldberg MA. Effect of shear deformations on the bending of rectangular plates. J Appl Mech 1960;27:54–8.
18. Mansfield EH. The bending and stretching of plates, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1989:33–49.
19. Lee K.H., Lim G.T., Wang C.M. Thick Le'vy plates re-visited. Int J Solids Struct, submitted for publication.
20. Medwadowski, S.J., . A refined theory of elastic, orthotropic plates. ASME Journal of Applied Mechanics 25, 1958. 437–441.

21. Librescu L., 1975. Elastostatics and Kinetics of Anisotropic and Heterogeneous Shell-Type Structures. Noordhoff International, Leyden, The Netherlands.
22. Levinson M., 1980. An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communications* 7 (6), 343–350.
23. Reissner E., On Transverse Bending of Plates Including the Effects of Transverse Shear Deformation, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 25, pp. 495–502, 1975.
24. Murthy V.V., An Improved Transverse Shear Deformation Theory for Laminate Anisotropic Plates, NASA Technical Paper, p. 1903, 1981.
25. Reddy J.N., A Refined Nonlinear Theory of Plates with Transverse Shear Deformation, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 20, pp. 881–896, 1984.
26. J.N. Reddy, A Simple Higher-order Theory for Laminated Composite Plates, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, pp. 745–752, 1984.
27. K. Rohwer, Application of Higher Order Theories to the Bending Analysis of Layered Composite Plates, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 29, pp. 105–119, 1992.
28. Ferreira A.J.M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N., Static and Free Vibration Analysis of Composite Shells by Radial Basic Functions, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 30, pp. 719–733, 2006.
29. Ambartsumian S.A., On the Theory of Bending Plates, *Izv Otd Tech Nauk AN SSSR*, vol. 5, pp. 69–77, 1958.
30. Shi G., A New Simple Third-order Shear Deformation Theory of Plates, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, pp. 4399–4417, 2007
31. Yucheng Liu A Refined Shear Deformation Plate Theory, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 12:3, 141-149, 2011 DOI: 10.1080/15502287.2011.564267
32. Touratier M., An Efficient Standard Plate Theory, *International Journal of Engineering Science*, vol. 29(8), pp. 901–916, 1991.
33. Soldatos K.P., A Transverse Shear Deformation Theory for Homogeneous Monoclinic Plates, *Acta Mechanica*, vol. 94, pp. 195–200, 1992.
34. Karama M., Afaq K.S., Mistou S., Mechanical Behavior of Laminated Composite Beam by New Multi-layered Laminated Composite Structures Model with Transverse Shear Stress Continuity, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, pp. 1525–1546, 2003.
35. Aydogdu M., A New Shear Deformation Theory for Laminated Composite Plates, *Composite Structures*, vol. 89(1), pp. 94–101, 2008.
36. Shimpi, R.P., Refined plate theory and its variants. *AIAA Journal* 40 (1), 137–146. 2002.
37. Shimpi R.P., Patel H.G., A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis. *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006) 6783–6799, 2006

38. Shimpi R.P. et al. Single variable new first-order shear deformation theory for isotropic plates. *Lat Am J Solids Struct*, 2018
39. Shimpi, R.P., Guruprasad, P.J., Pakhare, K.S. Single variable new first order shear deformation theory for isotropic plates. *Latin Am. J. Solids Struct.* 15, 1–25 (2018).
40. Huu-Tai Thai, Nguyen, Trung-Kien, Vo, Thuc and Ngo, Tuan. A new simple shear deformation plate theory. *Composite Structures*, 171. 2017. pp. 277-285.
41. Pakhare, K.S., Sawhney, H., Shimpi, R.P. *et al.* Analytical and numerical investigations of the flexure of isotropic plates using the novel first-order shear deformation theory. *Proc. Indian Natl. Sci. Acad.* 87, 379–392 (2021).
<https://doi.org/10.1007/s43538-021-00032-7>
42. Тұрсынов К.А. Ортотроптық пластинаның иілуінің классикалық және дәлденген теориялары. Қарағанды университетінің хабаршысы. Математика сериясы. №1(37), Б 64-74, 2005
43. Тұрсунов К.А. Уточненная классическая теория ортотропных пластинок. Қарағанды университетінің хабаршысы. Математика сериясы. №(46), Б 105-111, 2007
44. Тұрсынов К.А., Тұрсынов Д.К. Конструкциялардың кеңістік элементтерін есептеу негіздері. Оқу құралы. -Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2007- 215б.
45. S. Akhazhanov, A. Nurgoziyeva, A. Kassenova. Refined Theories for Beam Bending: A Simplified Approach to Structural Analysis// *Engineering, Technology & Applied Science Research* Vol. 15, No. 2, 21709-21718. 2025.
<https://doi.org/10.48084/etasr.10127>
46. Ахажанов С.Б., Нурланова Б.М., Нургозиева А.Ж., Ахажанов Т.Б. Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтың ақырлы элементі. ҚарТУ. Университет еңбектері. – Бөлім 4, Құрылыс, Транспорт. – №4(85). – 2021. — Б. 197-202. DOI 10.52209/1609-1825_2021_4_197.
47. O. Khabidolda, S. Akhmediyev, N. Vatin, L., Abeuova, A. Nurgoziyeva, Studying dynamics of a cantilever bar with variable bending stiffness. *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*. – 2023. - Vol. 119. - No.3, P. 77-90. DOI: 10.34910/MCE.121.7
48. Нургозиева А.Ж. Нақтыланған классикалық теория бойынша топсалы бекітілген пластинаның иілуін есептеу. Студенттер мен жас ғалымдардың «GYLYM JÁNE BILIM - 2022»: XVII Халықаралық ғылыми конференциясының баяндамалар жинағы. Нұр-Сұлтан. Б.1612-1617. 2022.
49. Reddy J. N., *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, 2nd ed., Taylor & Francis (2007) [ISBN 0-8493-8415-X](https://doi.org/10.1080/00207179.2007.10649384)
50. Lee, K.H., Lim, G.T., Wang, C.M.: Thick Lévy plates re-visited. *Int. J. Solids Struct.* 39, 2002, 127–144
51. Нургозиева А.Ж. Айнымалыларды бөлу әдісімен жақтары қатты бекітілген тікбұрышты пластинаны есептеу. «Фараби әлемі» атты студенттер

мен жас ғалымдардың халықаралық ғылыми конференциясының материалдары (6-8 сәуір аралығы). Алматы. Б.69. 2022

52. С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. Пластинки оболочки. Издательство «Наука», Москва, 1966

53. Zenkour A.M. Exact mixed-classical solutions for the bending analysis of shear deformable rectangular plates. Appl. Math. Model. 27, 2003, 515–534

54. Ахажанов С.Б., Нургозиева А.Ж. Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі серпімді пластинаны есептеу әдісі. Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Хабаршысы. Техникалық ғылымдар және технологиялар сериясы. – №3(140).– 2022. – Б. 16-30. DOI: 10.32523/2616-7263-2022-140-3-16-31.

55. Akhazhanov S.B., Vatin N.I., Akhmediyev S., Akhazhanov T., Khabidolda O. Nurgoziyeva A. Beam on a two-parameter elastic foundation: Simplified finite element model. Magazine of Civil Engineering. 2023. 121(5). Article no. 12107.

56. S. Akhazhanov, A. Kassenova., A. Nurgoziyeva. Examination of a solid stamp on elastic foundation. Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университетінің хабаршысы. Сәулет және құрылыс. №1. Б. 295-303. 2025 DOI 10.51885/1561-4212_2025_1_295

57. Sungat Akhazhanov, Bayandy Bostanov, Adilbek Kaliyev, Talgat Akhazhanov, Assel Mergenbekova. Simplified method of calculating a beam on a two-parameter elastic foundation. International Journal of GEOMATE. - 2023.- Vol.25, Issue 111, pp.33-40., <https://doi.org/10.21660/2023.111.3898>

ҚОСЫМША

Ақырлы элементтер әдісінің бағдарламасы

```
Parameter (N=16,LS=75,JC=25,JT=10,IP=1,JZ=25,NG=16,MU=0,LR=8)
  DIMENSION A(LS,LS),AK(12,12),RM(4,N),IM(4,N),RC(JC),IC(JC),
  *IK(JT),PP(LS),AU(LS),PC(IP),KP(IP),BK(12,12),P(12),W(12),
  *CK(12,12),P2(12),P3(12),PK(LS),JM(4),KM(NG),PZ(JZ),P4(12),
  *DK(6,6),RMR(3,LR),IMR(3,LR),PS(12),PM(LS)
  OPEN(3,FILE='Dissert',STATUS='NEW')
  DATA RM/0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,
  *1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,
  *1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,
  *1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,
  *1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,
  *1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14/,
  *IM/1,2,7,6,2,3,8,7,3,4,9,8,4,5,10,9,6,7,12,11,7,8,13,
  *12,8,9,14,13,9,10,15,14,11,12,17,16,12,13,18,17,13,14,
  *19,18,14,15,20,19,16,17,22,21,17,18,23,22,18,19,24,23,
  *19,20,25,24/,
  *RC/0.25,.5,.5,.5,0.25,.5,1.,1.,1.,.5,.5,1.,1.,1.,
  *.5,.5,1.,1.,1.,.5,0.25,.5,.5,.5,0.25/,
  *IC/1,4,7,10,13,16,19,22,25,28,31,34,37,40,43,46,49,52,55,
  *58,61,64,67,70,73/
  DATA IK/14,29,44,59,74,75,72,69,66,63/,
  *KP/73/,PC/0.25/,
  *PZ/1.,2.,2.,2.,1.,2.,4.,4.,4.,2.,2.,4.,4.,4.,2.,2.,4.,4.,4.,2.,
  *1.,2.,2.,2.,1./,KM/1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16/,
  *IMR/21,22,0,22,23,0,23,24,0,24,25,0,5,10,1,10,15,1,15,20,1,
  *20,25,1/,
  *RMR/0.125,0.2,0.2,0.125,0.2,0.2,0.125,0.2,0.2,0.125,0.2,0.2,
  *0.125,0.2,0.2,0.125,0.2,0.2,0.125,0.2,0.2,0.125,0.2,0.2/
  AN=.3
  CALL EL2A(A,AK,CK,RM,IM,IC,RC,N,LS,JC,JT,IK,JM,AN,P2,P3,
  *DK,RMR,IMR,LR)
  CALL SAOBR(A,LS)
  CALL EL3A(A,AU,PP,PC,P4,IK,KM,IM,KP,RM,LS,IP,12,LS,JT,NG,N,
  *4,4,MU)
  WRITE(3,12)
12 FORMAT(//4X,32H,...Љ'Ғђ Ҙ...ђ...Ғ...™...Ѓ€%‰ € “ґҒ,»• ‘€//)
  DO 25 I=1,JZ
```

```

J=3*I-2
WRITE(3,15)I,AU(J),AU(J+1),AU(J+2),PP(J),PP(J+1),PP(J+2)
15 FORMAT(I4,6F12.6)
25 CONTINUE
CALL EL5A(A,AK,RM,IM,N,LS,JM,AN,CK,P2,P3,IC,RC,JC,
*DK,RMR,IMR,LR)
DO 40 I=1,LS
PP(I)=0.
DO 40 J=1,LS
40 PP(I)=PP(I)+A(I,J)*AU(J)
CALL EL6A(A,BK,RM,IM,N,LS,JM,AN,CK,P2,P3)
DO 50 I=1,LS
PK(I)=0.
DO 50 J=1,LS
50 PK(I)=PK(I)+A(I,J)*AU(J)
WRITE(3,30)
30 FORMAT(//4X,42H,...ЛБ'Тђ "†ѿѿ,›• ѓ...ѿЛб—€%o € ,Ќ""ђ...ЌЌ€• ""€ѿ€%o//)
DO 28 I=1,JZ
J=3*I-2
WRITE(3,18)I,PP(J),PP(J+1),PP(J+2),PK(J),PK(J+1),PK(J+2)
18 FORMAT(I4,6F12.6)
28 CONTINUE
CALL EL11(AK,RM,IM,AU,W,P,N,AN,LS,PZ,JZ,PP,PK,
*P2,P3,P4,CK,PS,PM)
DO 47 I=1,JZ
J=3*I-2
WRITE(3,46)I,PP(J),PP(J+1),PP(J+2),PK(J),PK(J+1),PK(J+2)
46 FORMAT(I4,6F12.6)
47 CONTINUE
WRITE(3,10)
10 FORMAT(//4X,35H,...ЛБ'Тђ› € ѿѿѿ...ђ...—Ќ›• '€ѿ € ѿђѿѓѓѓѿ,)
DO 48 I=1,JZ
J=3*I-2
WRITE(3,49)I,PM(J),PM(J+1),PM(J+2)
49 FORMAT(I4,3F12.6)
48 CONTINUE
CLOSE (3)
END

```

```

SUBROUTINE EL1(AK, RM, N, I, AN)
DIMENSION AK(12,12), RM(4,N)
A1=RM(1,I)
A2=RM(2,I)
AM=(A1/A2)
AK(1,1)=(A2/A1**3)*(4.+((14.-4.*AN)/5.)*AM**2+4.*AM**4)
AK(4,4)=AK(1,1)
AK(7,7)=AK(1,1)
AK(10,10)=AK(1,1)
AK(2,2)=(4./(3.*AM))+((4.-4.*AN)/15.)*AM
AK(5,5)=AK(2,2)
AK(8,8)=AK(2,2)
AK(11,11)=AK(2,2)
AK(3,3)=((4.*AM)/3.)+((4.-4.*AN)/15.*AM)
AK(6,6)=AK(3,3)
AK(9,9)=AK(3,3)
AK(12,12)=AK(3,3)
AK(1,2)=(A2/A1**2)*(2.+((1.+4.*AN)/5.)*AM**2)
AK(2,1)=AK(1,2)
AK(4,5)=-AK(1,2)
AK(5,4)=-AK(1,2)
AK(7,8)=-AK(1,2)
AK(8,7)=-AK(1,2)
AK(10,11)=AK(1,2)
AK(11,10)=AK(1,2)
AK(1,3)=(A1/A2**2)*(2.+(1.+4.*AN)/5.*AM**2)
AK(3,1)=AK(1,3)
AK(4,6)=AK(1,3)
AK(6,4)=AK(1,3)
AK(7,9)=-AK(1,3)
AK(9,7)=-AK(1,3)
AK(10,12)=-AK(1,3)
AK(12,10)=-AK(1,3)
AK(2,3)=AN
AK(3,2)=AK(2,3)
AK(5,6)=-AK(2,3)
AK(6,5)=-AK(2,3)
AK(8,9)=AK(2,3)
AK(9,8)=AK(2,3)
AK(11,12)=-AK(2,3)
AK(12,11)=-AK(2,3)

```

$AK(1,4)=(A2/A1^{**3})*(-4.-((14.-4.*AN)/5.)*AM^{**2}+2.*AM^{**4})$
 $AK(4,1)=AK(1,4)$
 $AK(7,10)=AK(1,4)$
 $AK(10,7)=AK(1,4)$
 $AK(1,10)=(A2/A1^{**3})*(2.+((4.*AN-14.)/5.)*AM^{**2}-4.*AM^{**4})$
 $AK(10,1)=AK(1,10)$
 $AK(4,7)=AK(1,10)$
 $AK(7,4)=AK(1,10)$
 $AK(1,5)=(A2/A1^{**2})*(2.+((1.-AN)/5.)*AM^{**2})$
 $AK(5,1)=AK(1,5)$
 $AK(2,4)=-AK(1,5)$
 $AK(4,2)=-AK(1,5)$
 $AK(7,11)=-AK(1,5)$
 $AK(11,7)=-AK(1,5)$
 $AK(8,10)=AK(1,5)$
 $AK(10,8)=AK(1,5)$
 $AK(2,5)=((2./(3.*AM))-((1.-AN)/15.)*AM)$
 $AK(5,2)=AK(2,5)$
 $AK(8,11)=AK(2,5)$
 $AK(11,8)=AK(2,5)$
 $AK(1,6)=(A1/A2^{**2})*(1.-((1.+4.*AN)/5.)*AM^{**2})$
 $AK(6,1)=AK(1,6)$
 $AK(3,4)=AK(1,6)$
 $AK(4,3)=AK(1,6)$
 $AK(7,12)=-AK(1,6)$
 $AK(12,7)=-AK(1,6)$
 $AK(9,10)=-AK(1,6)$
 $AK(10,9)=-AK(1,6)$
 $AK(3,6)=((2.*AM)/3.)-((4.-4.*AN)/15.*AM)$
 $AK(6,3)=AK(3,6)$
 $AK(9,12)=AK(3,6)$
 $AK(12,9)=AK(3,6)$
 $AK(1,11)=(A2/A1^{**2})*(1.-((1.+4.*AN)/5.)*AM^{**2})$
 $AK(11,1)=AK(1,11)$
 $AK(2,10)=AK(1,11)$
 $AK(10,2)=AK(1,11)$
 $AK(4,8)=-AK(1,11)$
 $AK(8,4)=-AK(1,11)$
 $AK(5,7)=-AK(1,11)$
 $AK(7,5)=-AK(1,11)$
 $AK(1,12)=(A1/A2^{**2})*(2.+(1.-AN)/5.*AM^{**2})$

$AK(12,1)=AK(1,12)$
 $AK(3,10)=-AK(1,12)$
 $AK(10,3)=-AK(1,12)$
 $AK(4,9)=AK(1,12)$
 $AK(9,4)=AK(1,12)$
 $AK(6,7)=-AK(1,12)$
 $AK(7,6)=-AK(1,12)$
 $AK(1,7)=(A2/A1^{**3})*(-2.+((14.-4.*AN)/5.)*AM^{**2}-2.*AM^{**4})$
 $AK(7,1)=AK(1,7)$
 $AK(4,10)=AK(1,7)$
 $AK(10,4)=AK(1,7)$
 $AK(1,8)=(A2/A1^{**2})*(1.-((1.-AN)/5.)*AM^{**2})$
 $AK(8,1)=AK(1,8)$
 $AK(2,7)=-AK(1,8)$
 $AK(7,2)=-AK(1,8)$
 $AK(4,11)=-AK(1,8)$
 $AK(11,4)=-AK(1,8)$
 $AK(5,10)=AK(1,8)$
 $AK(10,5)=AK(1,8)$
 $AK(1,9)=(A1/A2^{**2})*(1.-(1.-AN)/5.*AM^{**2})$
 $AK(9,1)=AK(1,9)$
 $AK(3,7)=-AK(1,9)$
 $AK(7,3)=-AK(1,9)$
 $AK(4,12)=AK(1,9)$
 $AK(12,4)=AK(1,9)$
 $AK(6,10)=-AK(1,9)$
 $AK(10,6)=-AK(1,9)$
 $AK(2,11)=(2./(3.*AM))-(((4.-4.*AN)/15.)*AM)$
 $AK(11,2)=AK(2,11)$
 $AK(5,8)=AK(2,11)$
 $AK(8,5)=AK(2,11)$
 $AK(2,8)=(1./(3.*AM))+(((1.-AN)/15.)*AM)$
 $AK(8,2)=AK(2,8)$
 $AK(5,11)=AK(2,8)$
 $AK(11,5)=AK(2,8)$
 $AK(3,9)=(AM/3.)+((1.-AN)/15.*AM)$
 $AK(9,3)=AK(3,9)$
 $AK(6,12)=AK(3,9)$
 $AK(12,6)=AK(3,9)$
 $AK(3,12)=((2.*AM)/3.)-((1.-AN)/15.*AM)$
 $AK(12,3)=AK(3,12)$


```

AK(6,9)=AK(3,12)
AK(9,6)=AK(3,12)
AK(2,6)=0.
AK(6,2)=0.
AK(2,9)=0.
AK(9,2)=0.
AK(2,12)=0.
AK(12,2)=0.
AK(3,5)=0.
AK(5,3)=0.
AK(3,8)=0.
AK(8,3)=0.
AK(3,11)=0.
AK(11,3)=0.
AK(5,9)=0.
AK(9,5)=0.
AK(5,12)=0.
AK(12,5)=0.
AK(6,8)=0.
AK(8,6)=0.
AK(6,11)=0.
AK(11,6)=0.
AK(8,12)=0.
AK(12,8)=0.
AK(9,11)=0.
AK(11,9)=0.
DO 10 K=1,12
DO 10 J=1,12
10 AK(K,J)=RM(3,I)*AK(K,J)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE EL2A(A,AK,CK,RM,IM,IC,RC,N,LS,JC,JT,IK,JM,AN,
*P2,P3,DK,RMR,IMR,LR)
DIMENSION A(LS,LS),AK(12,12),CK(12,12),RM(4,N),IM(4,N),RC(JC),
*IC(JC),IK(JT),JM(4),P2(12),P3(12),DK(6,6),RMR(3,LR),IMR(3,LR)
DO 1 I=1,LS
DO 1 J=1,LS
1 A(I,J)=0.
DO 2 M=1,N

```

```

CALL EL8(AK, RM, N, M, AN, CK, P2, P3)
DO 10 I=1,12
DO 10 J=1,12
10 AK(I,J)=CK(I,J)
IA=-3
JM(1)=IM(1,M)
JM(2)=IM(2,M)
JM(3)=IM(3,M)
JM(4)=IM(4,M)
DO 3 I=1,4
IA=IA+3
DO 3 IX=1,3
MX=3*IM(I,M)-3+IX
JX=IX+IA
DO 3 MT=1,3
J1=3*JM(1)-3+MT
J2=3*JM(2)-3+MT
J3=3*JM(3)-3+MT
J4=3*JM(4)-3+MT
A(MX,J1)=A(MX,J1)+AK(JX,MT)
A(MX,J2)=A(MX,J2)+AK(JX,MT+3)
A(MX,J3)=A(MX,J3)+AK(JX,MT+6)
3 A(MX,J4)=A(MX,J4)+AK(JX,MT+9)
2 CONTINUE
CALL EL3(A, DK, IMR, RMR, LS, LR)
DO 5 I=1,JC
M=IC(I)
5 A(M,M)=A(M,M)+RC(I)
DO 6 I=1,JT
M=IK(I)
DO 6 J=1,LS
IF (J-M)6,8,6
8 DO 9 K=1,LS
A(M,K)=0.
9 A(K,M)=0.
A(M,M)=1.
6 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE EL2(DK,RMR,IMR,LR,I)
  DIMENSION DK(6,6),RMR(3,LR),IMR(3,LR)
  DO 100 J=1,6
    DO 100 K=1,6
100 DK(J,K)=0.
      B3=1./RMR(1,I)**3
      B2=1./RMR(1,I)**2
      B1=1./RMR(1,I)
      IF(IMR(3,I)-1)103,104,104
103 DK(1,1)=12.*B3
      DK(1,2)=6.*B2
      DK(1,4)=-DK(1,1)
      DK(1,5)=DK(1,2)
      DK(2,2)=4.*B1
      DK(2,4)=-DK(1,2)
      DK(2,5)=2.*B1
      DK(3,3)=RMR(3,I)*B1
      DK(3,6)=-DK(3,3)
      DK(4,4)=DK(1,1)
      DK(4,5)=-DK(1,2)
      DK(5,5)=DK(2,2)
      DK(6,6)=DK(3,3)
      GO TO 105
104 DK(1,1)=12.*B3
      DK(1,3)=6.*B2
      DK(1,4)=-DK(1,1)
      DK(1,6)=DK(1,3)
      DK(2,2)=RMR(3,I)*B1
      DK(2,5)=-DK(2,2)
      DK(3,3)=4.*B1
      DK(3,4)=-DK(1,3)
      DK(3,6)=2.*B1
      DK(4,4)=DK(1,1)
      DK(4,6)=-DK(1,3)
      DK(5,5)=DK(2,2)
      DK(6,6)=DK(3,3)
105 L=0
      DO 101 J=2,6
        L=L+1
        DO 101 K=1,L
101 DK(J,K)=DK(K,J)

```

```

DO 102 J=1,6
DO 102 K=1,6
102 DK(J,K)=DK(J,K)*RMR(2,I)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE EL3(A,DK,IMR,RMR,LS,LR)
  DIMENSION A(LS,LS),DK(6,6),IMR(3,LR),RMR(3,LR)
  DO 104 M=1,LR
    CALL EL2(DK,RMR,IMR,LR,M)
    IA=-3
    DO 105 I=1,2
      IA=IA+3
      DO 105 IX=1,3
        MX=3*IMR(I,M)-3+IX
        JX=IX+IA
        DO 105 MT=1,3
          J1=3*IMR(1,M)-3+MT
          J2=3*IMR(2,M)-3+MT
          A(MX,J1)=A(MX,J1)+DK(JX,MT)
105  A(MX,J2)=A(MX,J2)+DK(JX,MT+3)
104  CONTINUE
    RETURN
  END

```

```

SUBROUTINE SAOBR(A,N)
  DIMENSION A(N,N)
C   ЦђЄ,...„...ЌЄ... Љ ’ђ...“ѓЉ‹ЉЌ›Љ ЉЂ’ђЄ–ЂЉ
  DO 1 J=1,N
    IM=J-1
    DO 1 I=J,N
      X=0.
      Y=0.
      DO 2 K=1,IM
        IF (IM-1) 4,3,3
4      RKJ=0.
        TIK=0.
        RKI=0.
        TJK=0.

```

```

      GO TO 5
3  RKJ=A(K,J)
   TIK=A(I,K)
   RKI=A(K,I)
   TJK=A(J,K)
5  X=X+TIK*RKJ
2  Y=Y+TJK*RKI
   IF (I-J) 6,7,6
7  A(I,J)=A(I,J)-X
   GO TO 1
6  A(I,J)=A(I,J)-X
   A(J,I)=(A(J,I)-Y)/A(J,J)
1  CONTINUE
C   Ғғґґґ™...К€... 'ґ...“ґґґґґґ• ґґґґґґ—
   IM=N-1
   DO 12 I=1,IM
   IS=I+1
   DO 12 J=IS,N
   L=J-1
   X=0.
   DO 13 K=I,L
   IF (K-I) 15,14,15
14  CIK=1.
   RKJ=A(K,J)
   GO TO 13
15  CIK=A(I,K)
   RKJ=A(K,J)
13  X=X+CIK*RKJ
12  A(I,J)=-X
   DO 16 I=1,N
16  A(I,I)=1./A(I,I)
   DO 20 LI=1,IM
   I=N+1-LI
   IS=I-1
   DO 20 JM=1,IS
   J=IS+1-JM
   IX=J+1
   X=0.
   DO 22 K=IX,I
   SIK=A(I,K)
   TKJ=A(K,J)

```

```

22 X=X+SIK*TKJ
20 A(I,J)=-X*A(J,J)
C   ЀБ•Ѐ†,...ЀЄ... ЀЃЃБ'ЀЀ%о ЀБ'ЃЄ→
DO 40 I=1,N
DO 40 J=1,N
X=0.
DO 41 L=J,N
IF (I-L) 42,43,45
45 CIL=0.
SLJ=0.
GO TO 41
43 CIL=1.
SLJ=A(L,J)
GOTO 41
42 CIL=A(I,L)
SLJ=A(L,J)
41 X=X+CIL*SLJ
40 A(I,J)=X
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE EL3A(A,AU,RA,PC,RB,IK,KM,IM,KP,RM,LS,IP,N1,N2,
*JT,NG,N,K1,K2,MU)
DIMENSION A(LS,LS),RA(LS),PC(IP),RB(N1),IK(JT),KM(NG),
*IM(K1,N),RM(K2,N),AU(LS),KP(IP)
DO 15 I=1,LS
15 RA(I)=0.
IF(MU-1)81,84,84
81 CALL SAP07(RB,RA,IM,RM,KM,N,NG,N1,N2,K1,K2)
DO 82 I=1,JT
M=IK(I)
DO 82 J=1,LS
IF(J-M)82,83,82
83 RA(M)=0.
82 CONTINUE
GO TO 85
84 DO 16 I=1,IP
M=KP(I)
16 RA(M)=PC(I)
85 DO 17 I=1,LS

```

```

AU(I)=0.
DO 17 J=1,LS
17 AU(I)=AU(I)+A(I,J)*RA(J)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SAP07(RB,RA,IM,RM,KM,N,NG,N1,N2,K1,K2)
DIMENSION KM(NG),RB(N1),RA(N2),IM(K1,N),RM(K2,N)
DO 6 I=1,N2
6 RA(I)=0.
DO 4 M=1,NG
M1=KM(M)
X=RM(1,M1)
Y=RM(2,M1)
DO 1 I=1,10,3
1 RB(I)=X*Y/4.
DO 2 I=2,11,9
2 RB(I)=Y*X**2/24.
DO 3 I=1,4,3
RB(I+4)=-Y*X**2/24.
RB(I+2)=X*Y**2/24.
3 RB(I+8)=-X*Y**2/24.
IA=-3
DO 5 I=1,4
IA=IA+3
DO 5 IX=1,3
MX=3*IM(I,M1)-3+IX
JX=IX+IA
5 RA(MX)=RA(MX)+RB(JX)
4 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE EL4(BK,RM,N,I,AN)
DIMENSION BK(12,12),RM(4,N)
A1=RM(1,I)
A2=RM(2,I)
DO 29 L=1,12
DO 29 M=1,12

```

$BK(L,M)=0.$
 29 $BK(M,L)=0.$
 $BK(1,1)=-(1.-AN)/(A1*A2)$
 $BK(1,2)=-(1.-AN)/A2$
 $BK(1,3)=-(1.-AN)/A1$
 $BK(1,4)=-BK(1,1)$
 $BK(1,6)=-BK(1,3)$
 $BK(1,7)=BK(1,1)$
 $BK(1,10)=-BK(1,1)$
 $BK(1,11)=-BK(1,2)$
 $BK(2,1)=(-6./(A1**2))-((6.*AN)/(A2**2))$
 $BK(2,2)=-4./A1$
 $BK(2,3)=(-4.*AN)/A2$
 $BK(2,4)=6./(A1**2)$
 $BK(2,5)=-2./A1$
 $BK(2,10)=(6.*AN)/(A2**2)$
 $BK(2,12)=(-2.*AN)/A2$
 $BK(3,1)=(-6./(A2**2))-((6.*AN)/(A1**2))$
 $BK(3,2)=(-4.*AN)/A1$
 $BK(3,3)=-4./A2$
 $BK(3,4)=(6.*AN)/(A1**2)$
 $BK(3,5)=(-2.*AN)/A1$
 $BK(3,10)=6./(A2**2)$
 $BK(3,12)=-2./A2$
 $BK(4,1)=BK(1,1)$
 $BK(4,3)=BK(1,3)$
 $BK(4,4)=BK(1,4)$
 $BK(4,5)=BK(1,2)$
 $BK(4,6)=-BK(1,3)$
 $BK(4,7)=BK(1,1)$
 $BK(4,8)=-BK(1,2)$
 $BK(4,10)=BK(1,4)$
 $BK(5,1)=BK(2,4)$
 $BK(5,2)=-BK(2,5)$
 $BK(5,4)=BK(2,1)$
 $BK(5,5)=-BK(2,2)$
 $BK(5,6)=BK(2,3)$
 $BK(5,7)=BK(2,10)$
 $BK(5,9)=BK(2,12)$
 $BK(6,1)=BK(3,4)$
 $BK(6,2)=-BK(3,5)$

$BK(6,4)=BK(3,1)$
 $BK(6,5)=-BK(3,2)$
 $BK(6,6)=BK(3,3)$
 $BK(6,7)=BK(3,10)$
 $BK(6,9)=BK(3,12)$
 $BK(7,1)=BK(4,1)$
 $BK(7,4)=BK(4,4)$
 $BK(7,5)=BK(4,5)$
 $BK(7,7)=BK(4,1)$
 $BK(7,8)=BK(4,8)$
 $BK(7,9)=BK(4,6)$
 $BK(7,10)=BK(4,10)$
 $BK(7,12)=BK(4,3)$
 $BK(8,4)=BK(5,7)$
 $BK(8,6)=-BK(5,9)$
 $BK(8,7)=BK(5,4)$
 $BK(8,8)=BK(5,5)$
 $BK(8,9)=-BK(5,6)$
 $BK(8,10)=BK(5,1)$
 $BK(8,11)=BK(5,2)$
 $BK(9,4)=BK(6,7)$
 $BK(9,6)=-BK(6,9)$
 $BK(9,7)=BK(6,4)$
 $BK(9,8)=BK(6,5)$
 $BK(9,9)=-BK(6,6)$
 $BK(9,10)=BK(6,1)$
 $BK(9,11)=BK(6,2)$
 $BK(10,1)=BK(7,1)$
 $BK(10,2)=BK(7,5)$
 $BK(10,4)=-BK(7,1)$
 $BK(10,7)=BK(7,1)$
 $BK(10,9)=BK(7,9)$
 $BK(10,10)=BK(7,10)$
 $BK(10,11)=BK(7,8)$
 $BK(10,12)=BK(7,12)$
 $BK(11,1)=BK(8,4)$
 $BK(11,3)=BK(8,6)$
 $BK(11,7)=BK(8,10)$
 $BK(11,8)=-BK(8,11)$
 $BK(11,10)=BK(8,7)$
 $BK(11,11)=-BK(8,8)$

```

BK(11,12)=BK(8,9)
BK(12,1)=BK(9,4)
BK(12,3)=BK(9,6)
BK(12,7)=BK(9,10)
BK(12,8)=-BK(9,11)
BK(12,10)=BK(9,7)
BK(12,11)=-BK(9,8)
BK(12,12)=BK(9,9)
DO 44 L=1,10,3
DO 44 J=1,12
44 BK(L,J)=2.*BK(L,J)
DO 45 L=1,12
DO 45 M=1,12
45 BK(L,M)=BK(L,M)*RM(3,I)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE EL5A(A,AK,RM,IM,N,LS,JM,AN,CK,P2,P3,IC,RC,JC,
*DK,RMR,IMR,LR)
DIMENSION A(LS,LS),AK(12,12),RM(4,N),IM(4,N),JM(4),CK(12,12),
*P2(12),P3(12),IC(JC),RC(JC),DK(6,6),RMR(3,LR),IMR(3,LR)
DO 1 I=1,LS
DO 1 J=1,LS
1 A(I,J)=0.
DO 2 M=1,N
CALL EL8(AK,RM,N,M,AN,CK,P2,P3)
DO 5 I=1,12
DO 5 J=1,12
5 AK(I,J)=CK(I,J)
IA=-3
JM(1)=IM(1,M)
JM(2)=IM(2,M)
JM(3)=IM(3,M)
JM(4)=IM(4,M)
DO 3 I=1,4
IA=IA+3
DO 3 IX=1,3
MX=3*IM(I,M)-3+IX
JX=IX+IA
DO 3 MT=1,3

```

```

J1=3*JM(1)-3+MT
J2=3*JM(2)-3+MT
J3=3*JM(3)-3+MT
J4=3*JM(4)-3+MT
A(MX,J1)=A(MX,J1)+AK(JX,MT)
A(MX,J2)=A(MX,J2)+AK(JX,MT+3)
A(MX,J3)=A(MX,J3)+AK(JX,MT+6)
3 A(MX,J4)=A(MX,J4)+AK(JX,MT+9)
2 CONTINUE
CALL EL3(A,DK,IMR,RMR,LS,LR)
DO 6 I=1,JC
M=IC(I)
6 A(M,M)=A(M,M)+RC(I)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE EL6A(A,BK,RM,IM,N,LS,JM,AN,CK,P2,P3)
DIMENSION A(LS,LS),BK(12,12),RM(4,N),IM(4,N),JM(4),
*CK(12,12),P2(12),P3(12)
DO 1 I=1,LS
DO 1 J=1,LS
1 A(I,J)=0.
DO 2 M=1,N
CALL EL9(BK,RM,N,M,AN,CK,P2,P3)
DO 6 I=1,12
DO 6 J=1,12
6 BK(I,J)=CK(I,J)
IA=-3
JM(1)=IM(1,M)
JM(2)=IM(2,M)
JM(3)=IM(3,M)
JM(4)=IM(4,M)
DO 3 I=1,4
IA=IA+3
DO 3 IX=1,3
MX=3*IM(I,M)-3+IX
JX=IX+IA
DO 3 MT=1,3
J1=3*JM(1)-3+MT
J2=3*JM(2)-3+MT

```

```

J3=3*JM(3)-3+MT
J4=3*JM(4)-3+MT
A(MX,J1)=A(MX,J1)+BK(JX,MT)
A(MX,J2)=A(MX,J2)+BK(JX,MT+3)
A(MX,J3)=A(MX,J3)+BK(JX,MT+6)
3 A(MX,J4)=A(MX,J4)+BK(JX,MT+9)
2 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE EL7(AK, RM, IM, AU, W, P, N, AN, LS, I, K1, CK, P2, P3)
DIMENSION AK(12,12), IM(4,N), RM(4,N), P(12), W(12), AU(LS),
*CK(12,12), P2(12), P3(12)
I1=3*IM(1,I)-2
I2=3*IM(2,I)-2
I3=3*IM(3,I)-2
I4=3*IM(4,I)-2
IA=-1
DO 40 K=1,3
IA=IA+1
W(1+IA)=AU(I1+IA)
W(4+IA)=AU(I2+IA)
W(7+IA)=AU(I3+IA)
40 W(10+IA)=AU(I4+IA)
IF(K1-2)80,81,83
80 CALL EL8(AK, RM, N, I, AN, CK, P2, P3)
GO TO 82
81 CALL EL9(AK, RM, N, I, AN, CK, P2, P3)
GO TO 82
83 CALL EL6(AK, RM, N, I, AN, CK, P2, P3)
82 DO 42 K=1,12
P(K)=0.
DO 42 L=1,12
42 P(K)=P(K)+CK(K,L)*W(L)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE EL11(AK, RM, IM, AU, W, P, N, AN, LS, PZ, JZ, PP, PK, P2, P3, P4,
*CK, PS, PM)
DIMENSION AK(12,12), RM(4,N), IM(4,N), W(12), AU(LS), PZ(JZ),

```

```

*PP(LS),P(12),CK(12,12),P2(12),P3(12),P4(12),PK(LS),
*PS(12),PM(LS)
DO 102 J=1,LS
PP(J)=0.
PM(J)=0.
102 PK(J)=0.
DO 100 I=1,N
J1=3*IM(1,I)-2
J2=3*IM(2,I)-2
J3=3*IM(3,I)-2
J4=3*IM(4,I)-2
CALL EL7(AK,RM,IM,AU,W,P,N,AN,LS,I,1,CK,P2,P3)
CALL EL7(AK,RM,IM,AU,W,P4,N,AN,LS,I,2,CK,P2,P3)
CALL EL7(AK,RM,IM,AU,W,PS,N,AN,LS,I,3,CK,P2,P3)
IA=-1
DO 101 K=1,3
IA=IA+1
PP(J1+IA)=PP(J1+IA)+P(1+IA)
PP(J2+IA)=PP(J2+IA)+P(4+IA)
PP(J3+IA)=PP(J3+IA)+P(7+IA)
PP(J4+IA)=PP(J4+IA)+P(10+IA)
PM(J1+IA)=PM(J1+IA)+PS(1+IA)
PM(J2+IA)=PM(J2+IA)+PS(4+IA)
PM(J3+IA)=PM(J3+IA)+PS(7+IA)
PM(J4+IA)=PM(J4+IA)+PS(10+IA)
PK(J1+IA)=PK(J1+IA)+P4(1+IA)
PK(J2+IA)=PK(J2+IA)+P4(4+IA)
PK(J3+IA)=PK(J3+IA)+P4(7+IA)
101 PK(J4+IA)=PK(J4+IA)+P4(10+IA)
100 CONTINUE
DO 103 M=1,JZ
IA=-1
DO 103 K=1,3
IA=IA+1
J=3*M-2
PM(J+IA)=PM(J+IA)/PZ(M)
PP(J+IA)=PP(J+IA)/PZ(M)
103 PK(J+IA)=PK(J+IA)/PZ(M)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE EL9(AK, RM, N, I, AN, CK, P2, P3)
DIMENSION AK(12,12), RM(4,N), CK(12,12), P2(12), P3(12)
A1=RM(1,I)
A2=RM(2,I)
AM=A2/A1
T1=RM(4,I)
G1=-(T1/(1+12.*T1))
T2=RM(4,I)/(AM**2)
G2=-(T2/(1+12.*T2))
CALL EL4(AK, RM, N, I, AN)
DO 60 M1=1,12
P2(M1)=(AK(M1,2)+AK(M1,5)+AK(M1,8)+AK(M1,11))*G1
60 P3(M1)=(AK(M1,3)+AK(M1,6)+AK(M1,9)+AK(M1,12))*G2
AZ=AN*AM
DO 85 M1=1,12
CK(M1,1)=AK(M1,1)+(6./A1)*(P2(M1)+P3(M1)/AM)
CK(M1,2)=AK(M1,2)+3.*P2(M1)+AZ*P3(M1)
CK(M1,3)=AK(M1,3)+AN*P2(M1)/AM+3.*P3(M1)
CK(M1,4)=AK(M1,4)+(6./A1)*(-P2(M1)+P3(M1)/AM)
CK(M1,5)=AK(M1,5)+3.*P2(M1)-AZ*P3(M1)
CK(M1,6)=AK(M1,6)-AN*P2(M1)/AM+3.*P3(M1)
CK(M1,7)=AK(M1,7)-(6./A1)*(P2(M1)+P3(M1)/AM)
CK(M1,8)=AK(M1,8)+3.*P2(M1)+AZ*P3(M1)
CK(M1,9)=AK(M1,9)+AN*P2(M1)/AM+3.*P3(M1)
CK(M1,10)=AK(M1,10)+(6./A1)*(P2(M1)-P3(M1)/AM)
CK(M1,11)=AK(M1,11)+3.*P2(M1)-AZ*P3(M1)
85 CK(M1,12)=AK(M1,12)-AN*P2(M1)/AM+3.*P3(M1)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE EL8(AK, RM, N, I, AN, CK, P2, P3)
DIMENSION AK(12,12), RM(4,N), CK(12,12), P2(12), P3(12)
A1=RM(1,I)
A2=RM(2,I)
AM=A2/A1
T1=RM(4,I)
G1=-(T1/(1+12.*T1))
T2=RM(4,I)/(AM**2)
G2=-(T2/(1+12.*T2))

```

```

CALL EL1(AK, RM, N, I, AN)
DO 60 M1=1,12
  P2(M1)=(AK(M1,2)+AK(M1,5)+AK(M1,8)+AK(M1,11))*G1
60 P3(M1)=(AK(M1,3)+AK(M1,6)+AK(M1,9)+AK(M1,12))*G2
  AZ=AN*AM
  DO 85 M1=1,12
    CK(M1,1)=AK(M1,1)+(6./A1)*(P2(M1)+P3(M1)/AM)
    CK(M1,2)=AK(M1,2)+3.*P2(M1)+AZ*P3(M1)
    CK(M1,3)=AK(M1,3)+AN*P2(M1)/AM+3.*P3(M1)
    CK(M1,4)=AK(M1,4)+(6./A1)*(-P2(M1)+P3(M1)/AM)
    CK(M1,5)=AK(M1,5)+3.*P2(M1)-AZ*P3(M1)
    CK(M1,6)=AK(M1,6)-AN*P2(M1)/AM+3.*P3(M1)
    CK(M1,7)=AK(M1,7)-(6./A1)*(P2(M1)+P3(M1)/AM)
    CK(M1,8)=AK(M1,8)+3.*P2(M1)+AZ*P3(M1)
    CK(M1,9)=AK(M1,9)+AN*P2(M1)/AM+3.*P3(M1)
    CK(M1,10)=AK(M1,10)+(6./A1)*(P2(M1)-P3(M1)/AM)
    CK(M1,11)=AK(M1,11)+3.*P2(M1)-AZ*P3(M1)
85 CK(M1,12)=AK(M1,12)-AN*P2(M1)/AM+3.*P3(M1)
  RETURN
END

```

```

SUBROUTINE EL6(TK, RM, N, I, AN, CK, P2, P3)
DIMENSION TK(12,12), RM(4,N), CK(12,12), P2(12), P3(12)
A1=RM(1,I)
A2=RM(2,I)
AM=A2/A1
T1=RM(4,I)
G1=T1/(1+12.*T1)
T2=RM(4,I)/(AM**2)
G2=T2/(1+12.*T2)
CALL EL5(TK, RM, N, I)
DO 60 M1=1,12
  P2(M1)=(TK(M1,2)+TK(M1,5)+TK(M1,8)+TK(M1,11))*G1
60 P3(M1)=(TK(M1,3)+TK(M1,6)+TK(M1,9)+TK(M1,12))*G2
  AZ=AN*AM
  DO 85 M1=1,12
    CK(M1,1)=TK(M1,1)+(6./A1)*(P2(M1)+P3(M1)/AM)
    CK(M1,2)=TK(M1,2)+3.*P2(M1)+AZ*P3(M1)
    CK(M1,3)=TK(M1,3)+AN*P2(M1)/AM+3.*P3(M1)
    CK(M1,4)=TK(M1,4)+(6./A1)*(-P2(M1)+P3(M1)/AM)

```

```

CK(M1,5)=TK(M1,5)+3.*P2(M1)-AZ*P3(M1)
CK(M1,6)=TK(M1,6)-AN*P2(M1)/AM+3.*P3(M1)
CK(M1,7)=TK(M1,7)-(6./A1)*(P2(M1)+P3(M1)/AM)
CK(M1,8)=TK(M1,8)+3.*P2(M1)+AZ*P3(M1)
CK(M1,9)=TK(M1,9)+AN*P2(M1)/AM+3.*P3(M1)
CK(M1,10)=TK(M1,10)+(6./A1)*(P2(M1)-P3(M1)/AM)
CK(M1,11)=TK(M1,11)+3.*P2(M1)-AZ*P3(M1)
85 CK(M1,12)=TK(M1,12)-AN*P2(M1)/AM+3.*P3(M1)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE EL5(TK,RM,N,I)
DIMENSION TK(12,12),RM(4,N)
A1=RM(1,I)
A2=RM(2,I)
DO 90 L=1,12
DO 90 M=1,12
TK(L,M)=0.
90 TK(M,L)=0.
TK(1,1)=12./A1**3+6./(A1*A2**2)
TK(1,2)=6./A1**2
TK(1,3)=4./(A1*A2)
TK(1,7)=6./(A1*A2**2)
TK(1,12)=2./(A1*A2)
TK(1,4)=-TK(1,1)
TK(1,5)=TK(1,2)
TK(1,6)=-TK(1,3)
TK(1,9)=-TK(1,12)
TK(1,10)=-TK(1,7)
DO 91 L=1,12
91 TK(4,L)=TK(1,L)
TK(7,1)=-TK(1,7)
TK(7,3)=-TK(1,12)
TK(7,4)=TK(1,7)
TK(7,6)=TK(1,12)
TK(7,7)=-TK(1,1)
TK(7,8)=TK(1,2)
TK(7,9)=TK(1,3)
TK(7,10)=TK(1,1)
TK(7,11)=TK(1,2)

```



```

TK(7,12)=-TK(1,3)
DO 92 L=1,12
92 TK(10,L)=TK(7,L)
TK(2,1)=12./A2**3+6./(A1**2*A2)
TK(2,2)=TK(1,3)
TK(2,3)=6./A2**2
TK(2,7)=6./(A1**2*A2)
TK(2,5)=TK(1,12)
TK(2,4)=-TK(2,7)
TK(2,8)=-TK(1,12)
TK(2,10)=-TK(2,1)
TK(2,11)=-TK(1,3)
TK(2,12)=TK(2,3)
DO 93 L=1,12
93 TK(11,L)=TK(2,L)
TK(5,1)=-TK(2,7)
TK(5,2)=-TK(1,12)
TK(5,4)=TK(2,1)
TK(5,5)=-TK(1,3)
TK(5,6)=TK(2,3)
TK(5,7)=-TK(2,1)
TK(5,8)=TK(1,3)
TK(5,9)=TK(2,3)
TK(5,10)=TK(2,7)
TK(5,11)=TK(1,12)
DO 94 L=1,12
94 TK(8,L)=TK(5,L)
TK(3,1)=-6.*(1./A1**2+1./A2**2)
TK(3,2)=-4./A1
TK(3,3)=-4./A2
TK(3,4)=6./A1**2
TK(3,5)=-2./A1
TK(3,10)=6./A2**2
TK(3,12)=-2./A2
TK(6,1)=TK(3,4)
TK(6,2)=-TK(3,5)
TK(6,4)=TK(3,1)
TK(6,5)=-TK(3,2)
TK(6,6)=TK(3,3)
TK(6,7)=TK(3,10)
TK(6,9)=TK(3,12)

```

```

TK(9,4)=TK(3,10)
TK(9,6)=-TK(3,12)
TK(9,7)=TK(3,1)
TK(9,8)=-TK(3,2)
TK(9,9)=-TK(3,3)
TK(9,10)=TK(3,4)
TK(9,11)=-TK(3,5)
TK(12,1)=TK(3,10)
TK(12,3)=-TK(3,12)
TK(12,7)=TK(3,4)
TK(12,8)=TK(3,5)
TK(12,10)=TK(3,1)
TK(12,11)=TK(3,2)
TK(12,12)=-TK(3,3)
DO 95 L=1,12
DO 95 M=1,12
95 TK(L,M)=TK(L,M)*RM(3,I)
RETURN
END

```